Spunti di riflessione sulla didattica della matematica a partire da un questionario - Questioni trasversali

Giuliano Spirito, 2003

Gli insegnanti di matematica della scuola media e del biennio delle superiori sanno piuttosto bene con quale bagaglio di conoscenze gli allievi si presentano al passaggio tra l'uno e l'altro ordine scolastico. Uno dei motivi per cui chi scrive, pur consapevole di trasgredire le regole del *politicamente corretto* in ambito didattico, nutre un profondo scetticismo rispetto alle prove d'ingresso che circolano nella scuola è che esse sembrano prevalentemente funzionali a ribadire quanto già noto, come evidenziato dalla sostanziale uniformità (del resto prevedibile per motivi probabilistici) dei risultati nelle diverse classi parallele e nei diversi anni scolastici.

Di qui è nata l'idea di provare a riflettere su qualche aspetto meno indagato - seppure meritevole di approfondimento - del repertorio di competenze maturato dagli alunni negli anni della scuola media. L'attenzione è stata così centrata su due punti: quali sono, in uscita dalla scuola di base, i livelli di consapevolezza relativi ad alcuni meccanismi fondanti del sapere matematico; e in quale misura tali livelli di consapevolezza si intrecciano con una capacità di verbalizzazione che renda la loro acquisizione sicura e stabile. Lo strumento attraverso cui si è cercato di "misurare" le variabili di cui sopra è stato quello di un questionario somministrato in due classi di prima liceo scientifico di una scuola del centro di Roma (in totale 59 studenti, di cui 56 presenti nel giorno della somministrazione; con il che si dimostra che l'aumento del numero di alunni per classe dovuto all'amorevole gestione della scuola pubblica del tandem Tremonti-Moratti produce almeno un risultato positivo: con poche classi si ottiene un campione quantitativamente significativo!); dunque i suoi esiti - del tutto uniformi nelle due classi - fanno riferimento a alunni fortemente motivati nei confronti dello studio della matematica e con livelli di preparazione generale e disciplinare decisamente superiori ai livelli medi in uscita dall'obbligo. Per motivi di leggibilità e di spazio, il questionario, pur pensato unitariamente - e così somministrato - è qui presentato suddiviso in due parti: la prima parte, concernente questioni e concetti di carattere trasversale (che cosa è la matematica, che cosa è una definizione, che cosa è una dimostrazione, che cosa è un'operazione, ecc.) è oggetto di questo articolo; la seconda parte, più direttamente agganciata alle tematiche numeriche e geometriche - ma anch'essa "piegata" su aspetti fondanti piuttosto che su specifiche conoscenze - è rinviata alla prossima puntata.

Veniamo dunque alla presentazione puntuale e commentata (con tutte le parzialità che ogni interpretazione porta con sé) delle risultanze della prima parte dell'indagine.

1 - INVENTA UNA DEFINIZIONE DI CHE COSA E' LA MATEMATICA (usando al massimo 30 parole)

Risposte (parole chiave): 20 citano "numeri"; 6 "numeri e figure"; 4 "aritmetica, algebra e geometria"; 4 "numeri e logica"; 3 "logica"; 3 "problemi"; 16 altro

Prevale l'identificazione della matematica con l'ambito numerico; solo una minoranza cita anche la geometria; qualcuno chiama in causa la logica. Ne emerge un vissuto della scuola di base in cui i numeri costituiscono il nucleo centrale della disciplina. Quasi tutti, comunque, pensano alla matematica nei termini dei suoi oggetti; solo una minoranza esigua sceglie una definizione più complessa e sofisticata, incentrata sul tipo di abilità (individuate prevalentemente nelle abilità di tipo logico) che il far matematica mette in gioco.

Vale la pena di rilevare anche il fatto che nelle definizioni proposte da 13 alunni è presente un rapporto tra matematica e realtà (resta aperta la questione se tale nesso sia frutto di un'esperienza vissuta o sia acritica ripetizione di un sentito dire).
Una piccola antologia di definizioni "divergenti", selezionate tra le 16 classificate come "altro":
"la matematica è certezza e ragionamento"
"la matematica non è un'opinione; la matematica è un ragionamento logico"
"la matematica è ciò che si può dimostrare, verificare"
"la matematica è una scienza esatta le cui leggi regolano l'universo"

2 - IL TUO PARERE SULLA MATEMATICA:
della matematica mi piace (al massimo 2 cose)
Risposte: algebra 12; geometria 12; problemi 12; espressioni 11; equazioni 9; aritmetica 5; diagrammi 4; calcolo delle probabilità 3; altro 6
della matematica non mi piace (al massimo 2 cose)
Risposte: frazioni 11; geometria 9; problemi 5; espressioni 5; aritmetica 5; equazioni 4; diagrammi 2; statistica 2; altro 6

Richiesti di indicare le "cose" preferite e le "cose" meno amate della matematica, alunne e alunni hanno in grande maggioranza interpretato il termine nel significato di "argomenti". Nel grande e confuso coacervo di tematiche, emerge, come dato più significativo, l'avversione verso le frazioni. Coloro che hanno interpretato le "cose" come gli "aspetti" della disciplina (in realtà era questa l'idea dell'estensore del questionario, che evidentemente ha formulato in modo infelice la richiesta e dunque coglie l'occasione per una formale autocritica), segnalano in positivo "il ragionamento che si nasconde dietro un problema", "risolvere calcoli difficili e problemi quasi impossibili", "fare i calcoli", "amplia la nostra mente e ci aiuta nella vita", "trovare formule alternative", "il modo più complesso (di operare) rispetto a altre discipline", "la possibilità che dà di risolvere problemi anche della vita pratica", mentre segnalano in negativo "i calcoli troppo complessi", "troppe formule da ricordare", "non si finisce mai di imparare".

3 - CHE COSA E' UNA DEFINIZIONE?
quali tra le seguenti sono definizioni e quali no:
Risposte:

	sì	no	non risponde
l'immediato successivo di 7 è 8	16 (4)	39 (12)	1
il quadrato è il quadrilatero che ha 4 lati e 4 angoli uguali	55 (16)	1 (0)	0
l'immediato successivo di un numero naturale n è il numero naturale che si ottiene da n aggiungendo 1	40 (11)	16 (5)	0
il quadrato ABCD ha il lato lungo 5 cm	7 (2)	47 (14)	2
ogni quadrato ha le diagonali uguali	42 (11)	11 (4)	3 (1)
3+2=5	19 (5)	36 (10)	1 (1)

7 è un numero primo	32 (6)	23 (10)	1
se due triangoli hanno i 3 lati a 2 a 2 uguali allora sono uguali	18 (8)	31 (8)	7
l'area del rettangolo si trova moltiplicando base per altezza	49 (12)	7 (4)	0
un numero primo è un numero naturale divisibile solo per 1 e per se stesso	52 (16)	3 (0)	1

N.B - qui e nel seguito, tra parentesi sono le risposte del sottogruppo formato da alunne e alunni delle due classi con valutazione "ottimo" (16 su 56)

Che cosa sia esattamente una definizione è faccenda alquanto sottile. Il meccanismo definitorio consiste, in buona sostanza, nell'introduzione di una nuova nozione a partire da nozioni già acquisite (in virtù di precedenti definizioni o in quanto nozioni in qualche modo primitive). Ma attenzione: anche se sappiamo già che cosa è un quadrilatero e che cosa debba intendersi per figura con 4 lati, la definizione "un quadrato è un quadrilatero con 4 lati" è ancora difettosa, benché "veritiera"; infatti, le proprietà "essere un quadrilatero" e "avere 4 lati", pur pertinenti ai quadrati, non li individuano in modo esclusivo. Dunque, non solo le nozioni che ricorrono nella definizione devono essere già note, ma devono anche far riferimento a proprietà *caratterizzanti* quanto intendiamo definire. Ovvero, una buona definizione di quadrato è solo quella che, dato un "oggetto geometrico", permette di stabilire inequivocabilmente se tale "oggetto" sia o meno un quadrato. Non è ragionevole pretendere la piena consapevolezza di questo meccanismo - pur fondamentale nella struttura di ogni disciplina e tanto più per una disciplina eminentemente astratta quale la matematica - da parte di quattordicenni. Ma sembra ragionevole che essi possiedano, dopo otto anni di studio della matematica, la capacità di operare una qualche distinzione tra il momento definitorio e altri momenti (di esemplificazione, di scoperta di proprietà, ecc.) presenti nell'attività matematica. E invece... E invece avviene, ad esempio, che la grande maggioranza (42 su 56) dei sottoposti al test ritenga che "ogni quadrato ha le diagonali uguali" sia una definizione, scambiando l'enunciazione di una proprietà con un'attività definitoria. Così come avviene che ben 32 su 56 considerino una definizione l'affermazione che 7 è un numero primo (meno numerosi, ma non assenti sono coloro che riconoscono come definizioni frasi del tipo "l'immediato successivo di 7 è 8" o "il quadrato ABCD ha il lato lungo 5 cm"), confondendo addirittura proprietà di singoli oggetti con definizioni. Anche un teorema quale il terzo criterio di uguaglianza dei triangoli o il procedimento per trovare l'area del rettangolo sono indicati come definizioni (rispettivamente da una minoranza non esigua - 18 su 56 - e da una schiacciante maggioranza di 49 su 56). E, sorprendentemente, le risposte fornite dai 16 alunni che hanno riportato "ottimo" in uscita dalla scuola media sono spesso perfettamente allineate e comunque complessivamente non migliori in modo significativo. A parziale consolazione, si può osservare che le tre definizioni presenti fra i dieci enunciati sono riconosciute come tali da maggioranze consistenti (rispettivamente da 55, 40 e 52 alunni).

Qualche parola di commento: piuttosto che richiedere agli alunni di capire e memorizzare una serie di definizioni, varrebbe forse la pena di praticare nelle classi - in aggiunta se non in alternativa - una tipologia di attività che potremmo definire in termini di "gioco della definizione": discussione di proposte di definizione, costruzione per approssimazioni successive di nuove definizioni, verifica della corrispondenza di enunciazioni alla "grammatica" della buona definizione, ecc., in modo da rendere esplicito, leggibile e riconoscibile il meccanismo sotteso all'attività definitoria.

4 - CHE COSA E' UNA DIMOSTRAZIONE?

quali tra le seguenti sono dimostrazioni convincenti e quali no dell'affermazione

"il prodotto di un numero positivo e di un numero negativo è un numero negativo"

	sì	no	non risponde
infatti più per meno fa meno	46 (13)	10 (3)	0
infatti addizionare ripetute volte un numero negativo produce sempre un numero negativo	20 (8)	35 (8)	1
infatti +2 per -5 è uguale a -10	43 (11)	13 (5)	0
infatti il prodotto di un positivo e di un negativo è sempre un negativo	39 (12)	17 (4)	0
infatti se il risultato venisse positivo significherebbe che la divisione del risultato (positivo) per il primo fattore (positivo) sarebbe uguale al secondo fattore (negativo), il che è impos- sibile	23 (7)	29 (9)	3

E' vero che l'attività dimostrativa non è sostanzialmente prevista (a ragione!) nella scuola media; ciò non toglie che si potrebbe sperare che gli alunni abbiano una qualche percezione di che cosa significhi argomentare correttamente e efficacemente a favore di una tesi. Il quadro che si presenta è però sconsolante: come sa benissimo chiunque insegna (e a qualsiasi livello scolare!), gli allievi (nel nostro caso 43 su 56) ritengono attività dimostrativa (anzi l'attività dimostrativa per eccellenza) l'esibizione di un esempio a favore della tesi; più sorprendente è che la grande maggioranza degli studenti (in un caso 39 e nell'altro 46 su 56) qualifichi in termini di dimostrazione convincente la semplice parafrasi della tesi, tanto meglio se in forma di slogan (il famigerato "più per meno fa meno"). Paradossalmente, le due argomentazioni che davvero costituiscono in qualche modo una dimostrazione dell'affermazione "positivo per negativo uguale negativo", in quanto la riconducono a conoscenze precedenti e comunque di livello più "primitivo", ottengono un gradimento piuttosto basso (rispettivamente 20 e 23 su 56); gioca un ruolo respingente, probabilmente, la maggiore complessità logico-linguistica che caratterizza necessariamente un'argomentazione probante, complessità che la espone al dubbio sulla sua affidabilità. Anche questa volta, inoltre, si può rilevare che il sottocampione costituito dagli "ottimi" fornisce risultati che non si discostano sostanzialmente da quelli relativi all'intero campione, se non per un'adesione meno plebiscitaria (ma pur sempre maggioritaria) all'idea che "esempio favorevole" coincida con "convincente dimostrazione".

Morale: in qualche momento, sarà pur necessario che alunne e alunni acquisiscano consapevolezza di due fatti:

a) l'attività dimostrativa è sostanzialmente una "riduzione" di una nuova conoscenza a conoscenze pregresse;

b) la produzione di esempi a favore di un'affermazione "universale" non è dirimente (mentre la produzione del contro-esempio lo è, sia pure in negativo).
Varrebbe dunque la pena di progettare e praticare attività finalizzate a questi scopi già dalla scuola di base (dove, pure, sembra accettabile e addirittura preferibile che ciò avvenga in modo informale, non sistematico e accettando un livello di cognizione non pieno e compiuto).

5 - OPERAZIONI
a) fai un esempio di operazione nell'insieme degli angoli
Risposte: forniscono l'esempio 26 (7); non rispondono 30 (9)

b)

	sì	no	non risponde
il simbolo = indica un'operazione	12 (5)	43 (11)	1
il teorema di Pitagora è un'operazione	40 (13)	15 (3)	1
dividere un insieme in classi (ad esempio un gruppo di amici secondo l'età) è un'operazione	34 (12)	19 (4)	3
il simbolo > indica un'operazione	6 (1)	50 (15)	0
il simbolo + indica un'operazione	56 (16)	0	0
dare un ordinamento a un insieme è un'operazione	11	44 (16)	1

Quale idea hanno gli alunni di un'operazione? Il fatto che la maggioranza non sia in grado di fornire un esempio di operazione tra oggetti che non siano puri e semplici numeri, quali gli angoli, testimonia di una difficoltà di contestualizzare ad ambiti non aritmetici la nozione di operazione. Sarebbe stato forse opportuno - altra critica all'estensore del questionario! - fare un'analoga richiesta per un secondo ambito non numerico (ad esempio l'insiemistica), in cui - tra l'altro - l'operazione eventualmente indicata dagli alunni non risultasse, come nel caso degli angoli, un'operazione aritmetica appena un po' travestita! Le risposte ai quesiti del gruppo b), dove perfidamente c'è un solo caso di risposta positiva che risulterebbe corretta, evidenziano ulteriori problemi. Spicca, ad esempio, l'elevatissimo numero di risposte positive (e quindi errate) relativamente al teorema di Pitagora, laddove si confonde il fatto vero che nell'enunciato compaiano alcune operazioni con il fatto falso che l'enunciato stesso costituisca un'operazione; così come avviene (anche se questa volta solo per una minoranza, però non del tutto esigua e con al suo interno circa un terzo degli "ottimi") che venga letto il simbolo di "uguale" come indicante un'operazione, confondendo l'operazione con il simbolo che, semmai, ne preannuncia il risultato (ovvero, in termini più rigorosi, confondendo l'operazione con la relazione che intercorre tra operandi e risultato). Colpisce, infine, la distanza tra i risultati relativi a una partizione (indicata come operazione da un'ampia maggioranza) e quelli relativi a un ordinamento (indicato come operazione da una minoranza piuttosto esigua); infatti, sia la partizione che l'ordinamento sono in senso lato operazioni (in quanto procedure che producono un effetto), mentre l'una e l'altro non lo sono in senso stretto. Tale difformità di giudizio - a prima vista incongrua e incomprensibile - si giustifica forse con una suggestione di tipo linguistico, giacché nella descrizione della partizione compare la parola divisione, evocando dunque la familiare omonima operazione aritmetica: chissà che il risultato non sarebbe stato diverso se nell'enunciato si fosse parlato di "suddivisione" anziché di divisione...

Tutti i nodi emersi alludono a un'assenza: non è acquisito che un'operazione, limitandosi al caso binario, è una corrispondenza che associa a ciascuna coppia di elementi dell'insieme su cui l'operazione è definita (gli operandi) un altro elemento dell'insieme (il risultato). La mancanza di un minimo di controllo su questo meccanismo, da una parte conduce alla difficoltà di riferire la nozione di operazione a contesti diversi e a ambiti più generali di quello numerico; dall'altra fa sì che il termine "operazione" finisca per coprire molte cose che operazioni non sono. La pratica didattica - pur promuovendo la "confidenza" con le operazioni attraverso svariate applicazioni, peraltro tanto formalmente complesse quanto ripetitive - sacrifica il momento dell'acquisizione del concetto in forma organizzata e consapevole, in nome della scelta a prima vista saggia e realistica di un profilo non eccessivamente alto. Ma qui si nasconde probabilmente un equivoco: ciò che sarebbe necessario non è certo la formalizzazione precoce della nozione astratta di operazione, bensì la sostituzione delle esasperate manipolazioni calcolistiche con una molteplicità e ricchezza di attività, anche "laboratoriali", attraverso cui il concetto di operazione dovrebbe andare progressivamente a definirsi nelle sue componenti essenziali e caratteristiche.

6 - LA MATEMATICA HA A CHE FARE CON L'INFINITO

fai un esempio, preso dall'aritmetica, in cui "salta fuori" l'infinito

Risposte: numeri periodici 25; i numeri sono infiniti 16; divisioni per zero 3; numeri grandi 3; non risponde 9

fai un esempio, preso dalla geometria, in cui "salta fuori" l'infinito

Risposte: la retta è infinita 26; i punti della retta sono infiniti o le rette per un punto sono infinite o simili 10; numeri periodici nel risultato di un problema 2; non risponde 18

L'infinito percorre e attraversa tutto il pensiero matematico. E' naturale, dunque, "curiosare" un po' nel modo in cui gli alunni tengono conto di tutto ciò. Anche in questa occasione il nostro questionario fornisce qualche informazione non del tutto scontata. Dunque, in ambito aritmetico, la maggioranza relativa delle risposte (ben 25 su 56) contengono come esempio di incontro con l'infinito i numeri periodici. Ora, mentre si può discutere a lungo se l'incontro con i periodici costituisca un buon esempio di situazione in cui "salta fuori" l'infinito (il parere di chi scrive è sostanzialmente negativo: un numero periodico fa riferimento a una quantità finita, sia pure presentando infinite cifre decimali), è degno di nota il fatto che solo 16 allievi forniscono la risposta più ovvia (i numeri sono in quantità infinita). Rimane quindi in ombra una caratteristica fondante degli insiemi numerici al cui interno si opera (in primo luogo N), caratteristica certamente risaputa (a domanda: quanti sono i numeri? la risposta unanime sarebbe: infiniti), ma forse non sufficientemente introiettata e dunque non costantemente presente come ancoraggio del "pensiero numerico" degli alunni. E ciò non meraviglia più di tanto: non si usa forse dire che 100 milioni è un numero naturale *grande*? Laddove, come è ovvio, esso può essere grande all'interno di un contesto e/o nel confronto con altri numeri, ma non in assoluto: nessun

numero (neanche 100 milioni di milioni di milioni) è, in sé per sé, *grande*, avendo comunque un numero finito di predecessori e un numero infinito di successivi. L'abuso linguistico, in definitiva, testimonia nei nostri allievi di un difetto di consapevolezza.
Qualcosa di analogo avviene in ambito geometrico: la maggioranza relativa (in questo caso 26 su 56) indica come esempio di infinito la retta e altri 18 non forniscono alcun esempio; solo 10, correttamente, citano i punti di una retta o le rette per un punto o simili. Ora, di nuovo, la risposta maggioritaria, in sé non errata, appare nondimeno piuttosto insoddisfacente, in quanto sembra individuare la retta come esempio di infinito in virtù del suo "prolungarsi all'infinito" e non in virtù dell'infinità dei suoi punti. Le due cose sono ampiamente indipendenti, giacché anche il segmento ha infiniti punti, pur non prolungandosi all'infinito. E' dunque davvero un peccato che nessuno fornisca la risposta più "bella", quella che inequivocabilmente testimonierebbe dell'avvenuta acquisizione del fondamento della geometria quale noi la concepiamo: l'infinito, in ambito geometrico, "salta fuori", innanzitutto, dalla considerazione dei punti di un segmento, ovvero dei punti compresi tra due punti. Ma probabilmente questa assenza non è casuale: anche la nozione di punto adimensionale, pur nota agli allievi, non è sufficientemente interiorizzata e dunque non abbastanza presente come substrato del loro "pensiero geometrico".

E' giunto il momento di trarre qualche conclusione dalla prima parte della nostra piccola indagine. La principale è probabilmente la seguente: le consapevolezze che più ameremmo vedere sedimentate nei nostri alunni non sono affatto un portato naturale, ovvio e scontato, dell'attività didattica nella scuola di base. Tutt'altro. Mentre conseguiamo (alcuni e parziali) successi sul piano delle abilità operative, dobbiamo registrare un forte insuccesso sul terreno del senso del lavoro che viene svolto e del controllo degli strumenti concettuali utilizzati; e, cosa forse sorprendente, ma proprio per questo significativa sul *nostro* lavoro, gli alunni migliori non presentano risultati significativamente diversi dagli altri. In questo contesto - e questa è la seconda conclusione - molte delle risposte degli alunni sono percorse da una difficoltà di controllo linguistico (sia in fase di ricezione che in fase di produzione) che interferisce pesantemente sul controllo concettuale, rendendolo incerto e instabile: non saper dire che un'operazione (binaria) associa a coppie di operandi un risultato significa non saperlo pensare in termini chiari e distinti, la sovrapposizione tra infinito in quanto illimitato e infinito in quanto costituito da infiniti elementi è conseguenza di una difficoltà anche linguistica (non avere le parole per dirlo), e così via. Infine: a questi insuccessi non si può pensare di porre riparo se non attraverso l'individuazione di attività specifiche miranti a fornire senso, consapevolezza, capacità di controllo linguistico e concettuale (attività feconde, dunque, anche in un ambito non strettamente disciplinare e quindi in grado di attribuire alla matematica il rilievo culturale e formativo che ad essa potrebbe spettare). Il che significa niente di meno che ripensare a fondo (sottoporre a una rivoluzione copernicana) la didattica della matematica, nelle sue gerarchie, nelle sue metodologie, nelle sue finalità.