La geometria nel biennio tra storia, costruzione e narrazione

Maurizio Berni

Firenze, 6 maggio 2007

maurizio.berni@istruzione.it

Geometria “euclidea” piana: il primo capitolo.

- Se sfogliamo le prime pagine di un qualsiasi libro di geometria, troviamo che essa trae la sua origine dall’esigenza pratica di ristabilire i confini dei campi dei contadini dopo le periodiche inondanzioni del Nilo; è quanto ci tramanda lo storico Erodoto.

Geometria “euclidea” piana: il primo capitolo.

- L’informazione si limita ad un semplice aneddoto; dopo di che si “gira pagina” e si inizia con teoremi, definizioni, anche con precisazioni pedanti (si dice “congruenti” e non “uguali”, ecc....) che recide i legami con questa motivazione iniziale

Geometria “euclidea” piana: il primo capitolo.

- Lo pseudoformalismo che si va costruendo costringe il cervello di chi apprende ad una sottomissione completa ai criteri di validazione del libro di testo e dell’insegnante (non sempre coincidenti) su che cosa è formale e cosa no, quali oggetti richiedano una definizione e quali no, quali ragionamenti sono accettabili e quali no (si vedano ad es. le “dimostrazioni” dei criteri di congruenza dei triangoli).

Geometria “euclidea” piana: il primo capitolo.

- Più che una palestra di ragionamento, è una palestra di conformismo e di sottomissione all’autorità, indipendentemente dalla coerenza interna delle sue richieste: entrambe caratteristiche nocive per lo sviluppo del pensiero critico, e matematico in particolare.

(dice Alain Connes: “La vita scientifica dei matematici (...) spesso trae inizio da un atto di ribellione rispetto alla dogmatica descrizione della realtà che si trova sui libri già scritti.”

Un approccio costruttivo

- Da tempo abbiamo sperimentato un approccio *costruttivo a*lla teoria, adottando l'ipotesi dello Zeuthen, secondo cui fu il desiderio di *giustificare* il teorema di Pitagora a condurre i geometri greci a *costruire* catene di proposizioni, risalendo alle più evidenti (i postulati, con un processo di *analisi*) per poi ridiscendere per deduzione al teorema di Pitagora (*sintesi*).

(Berni, d'Angelo “Da Pitagora agli assiomi”, Insegnare, n.5/95).

Un approccio costruttivo

La ri-costruzione della teoria è stata tale da comportare

- un cambiamento del linguaggio (non più “dimostra che” ma “costruisci”)
- La consapevolezza che gli oggetti geometrici esistono solo se è possibile la loro costruzione (non più “dato un quadrato...” ma “costruisci un quadrato”)

Un approccio costruttivo

- L'esplicitazione degli oggetti iniziali di una costruzione e dell'univocità della costruzione stessa (“costruisci un quadrato/un rombo dato il lato... “)
- L'esplicitazione delle operazioni permesse per ottenere la costruzione (per esempio non si possono prendere misure, ma solo “trasportare” segmenti), facendo risalire in modo naturale ad alcuni postulati (tracciare un segmento per due punti; prolungare un segmento; tracciare una circonferenza...)

Un approccio costruttivo

- Approfondire la disciplina (talvolta le versioni del V postulato di Euclide hanno una formulazione non completamente esatta...)
- “aprire” le questioni poste (non più “dimostra che” ma “che cosa osserviamo in questa figura? Lo possiamo dire con certezza? Perchè?)
- Prendere strade volta per volta diverse (un esempio notevole: le proprietà del rombo per un percorso completo di geometria assoluta)

Dal senso al coinvolgimento

- Le cose acquistano un senso, ma non sempre si riusciva ad ottenere e *mantenere* il coinvolgimento degli allievi
- Un “problema” non è una caratteristica intrinseca di certe situazioni da affrontare (personali, scolastiche, ecc.), ma è il risultato di un'attribuzione personale

Dal senso al coinvolgimento

- Generalmente un individuo affronta contemporaneamente più situazioni che vive come problematiche, e le affronta secondo un ordine di priorità che dipende dalle attribuzioni valoriali
- In ogni caso non è la ragione che per prima affronta un problema, ma un'*emozione*

(su *Problem solving* ed emozioni si veda R. Zan, “Difficoltà in matematica – Osservare, interpretare, intervenire”, Springer)

Dal senso al coinvolgimento

Che cosa è un **problema**?

Dewey, 1910: “si ha un problema quando si avverte una sensazione di difficoltà”

Mowrer, 1947: “presenza di una forte pulsione e mancanza di una risposta immediata per ridurla”

Van de Geer, 1957: “situazione in cui un individuo è motivato al conseguimento di una meta e il suo primo tentativo di raggiungerla è senza successo”

Duncker, 1969: “situazione in cui un essere vivente ha un obiettivo da raggiungere e non sa come raggiungerlo”

Bruner e la narrazione

Da: J. Bruner, “La cultura dell'educazione”, Feltrinelli.

"E' molto probabile (...) che il nostro modo più naturale e più precoce di organizzare l'esperienza e la conoscenza sia nei termini della forma narrativa."

“Dalla sequenza di eventi ricaviamo dei significati:

'La borsa crollò, il governo diede le dimissioni'

'Il governo diede le dimissioni, la borsa crollò'

Bruner e la narrazione

"L'arte di sollevare interrogativi stimolanti è probabilmente importante quanto l'arte di dare delle risposte chiare."

“La narrazione è giustificata o autorizzata quando la sequenza di eventi che racconta rappresenta una violazione della norma, narra cioè qualcosa di inatteso o qualcosa di cui l'ascoltatore ha motivo di dubitare."

Verifichiamo le capacità logiche...

1. (Wason, 1966) Osserva le seguenti quattro carte:

A	**R**	**4**	**7**

Dobbiamo verificare se per queste quattro carte è vera la regola

“Se da una parte c'è una vocale, dall'altra c'è un numero pari.”

Quali carte gireresti per controllare se questa regola è vera? Perché?

Verifichiamo le capacità logiche...

2. (Griggs&Cox, 1982) Immagina di essere un poliziotto che deve controllare se in un bar è rispettata la seguente legge:
"Se una persona beve birra, deve avere più di sedici anni".
Su un tavolo del bar vengono messe quattro carte: da un lato c'è l'età della persona da controllare (sotto/sopra i 16 anni), dall'altro il tipo di bibita consumata al bar. Le quattro carte sono girate in questo modo:

Beve birra	Sopra i 16 anni	Beve acqua	Sotto i 16 anni

Quali carte gireresti per controllare se questa regola è rispettata? Perché?

Un contesto narrativo plausibile per la geometria

- Abbiamo provato allora, in un contesto storico verosimile, a *identificarci* nei personaggi coinvolti nella ridefinizione dei confini dei campi inondati dal Nilo; in particolare in un <u>gruppo di contadini</u> coi campi confinanti e in uno <u>scriba</u>, o <u>notaio</u>, che deve convincere con certezza e autorevolezza della bontà dei suoi metodi per mettere d'accordo gli *interessi contrapposti* dei contadini.

Gli strumenti

- Gli agrimensori egizi erano chiamati "*arpedonapti*", annodatori di funi
- Tendendo una fune tra due punti, “tiravano” **rette**
- Tenendo ferma la fune in un estremo, e tenendola tirata, descrivevano **circonferenze**
- Riportando su carta, in scala, la situazione dei campi, usiamo gli strumenti più idonei, ma *equivalenti*, della *riga* e del *compasso*

Il teorema di Pitagora

Il contadino Ahmes, proprietario di un campo quadrato, ne ha ereditato un altro, sempre quadrato; vorrebbe unirli per avere un unico appezzamento, sempre di forma quadrata; se tu fossi l'agrimensore a cui Ahmes si è ri-volto, come lo aiuteresti?

Ma *come* si costruisce un quadrato? *Perché* si ottiene proprio un quadrato? Come convinci il contadino Ahmes?

Il sé e l'altro

In questa fase del ‘gioco’ si osserva un reale coinvolgimento da parte dei ragazzi.

La messa a fuoco della vera natura del problema è graduale, ed avviene in tempi diversi; essa, tuttavia, accende un dibattito.

Nasce un antagonismo: “Non mi fido della tua costruzione” “...chi mi dice che...” proprio come i contadini che possiamo immaginare interessati delle loro proprietà davanti ai notai.

Il sé e l'altro

Le locuzioni si allungano; si perde il loro controllo sintattico per rincorrere quello semantico, i ragazzi si correggono da soli; ricercano nella memoria alcuni termini che le condensino.

- La necessità di ‘raccontare’ come si è giunti ad un risultato potenzia il ruolo del linguaggio come strumento per risolvere un problema espositivo, e non come strumento di limitazione (come accade nel dialogo asimmetrico tra insegnante e alunno)

Il sé e l'altro

La definizione non è una richiesta dell’insegnante, che già la conosce, fatta allo scopo di ‘verificare se l’alunno ha studiato’; ma una necessità dell’alunno per eliminare ‘giri di parole’ nell’esposizione ai compagni che deve convincere; per questo motivo tende ad essere *essenziale* e non ridondante (contrariamente a qualche sciocco contratto didattico, talvolta implicito....)

Il sé e l'altro

E’ per sostenere questo dialogo, è per rispondere a queste domande che gli studenti si rivolgono tra loro, che nasce il bisogno di ‘convincere’, con un ragionamento che mette in moto delle sequenze logiche, ognuno secondo le proprie capacità del momento, che sono comunque sollecitate.

IL CURRICOLO NELLA SCUOLA DELL’AUTONOMIA

“L’ *altro* è il limite contro il quale naufraga l’egocentrismo cognitivo e quello sociale ed è la condizione per il loro superamento.

La disputa inevitabile apre la strada alla discussione e questa all’argomentazione.

Si impara grazie al dover rendere ragione delle proprie convinzioni e in tal modo si scopre che esistono anche altre ragioni, altri punti di vista, che possono migliorare o arricchire il nostro.

Come nella vita democratica adulta, anche nelle prime esperienze di interazione con gli altri, l’opposizione gioca un ruolo fondamentale perché non consente di coltivare l’illusione infantile di avere sempre ragione.”

Costruzione del quadrato

La costruzione del quadrato ripercorre

- la geometria “assoluta” (criteri di uguaglianza dei triangoli)
- la *storia* della geometria (quadrilatero di Saccheri)
- Va 'al cuore' della geometria euclidea nei suoi aspetti di tipo costruttivo, logico, culturale.

Problemi ulteriori

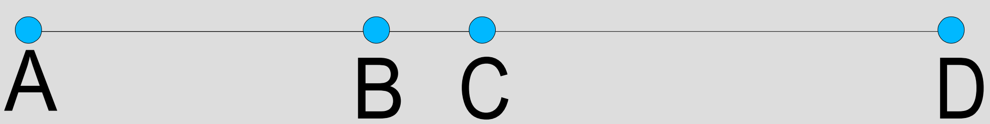
Ahmes possiede un campo lungo e stretto, difficile da lavorare; si deve rivolgere ad un agrimensore perché vorrebbe ottenere una superficie equivalente di forma quadrata; puoi aiutarlo a risolvere questo problema?

(teoremi cosiddetti “di Euclide”)

Sviluppi ulteriori

Proposizione II,5 degli Elementi

Se si divide una retta in parti uguali e in parti disuguali, il rettangolo formato dalle parti disuguali, insieme col quadrato della parte compresa tra i punti di divisione, è uguale al quadrato costruito su una delle parti uguali.



$$(AC-BC)(AC+BC)+BC^2=AC^2$$