Che cosa vuol dire risolvere un'equazione?

Maurizio Berni

Il titolo riprende una domanda di Roberto Ricci, professore di matematica all'Università di Firenze, prematuramente scomparso.

«Perché per risolvere un'equazione di primo grado occorre una procedura, e per una di secondo basta applicare una formula?»

Se si ritiene che l'insegnamento per competenze si limiti ad affrontare "compiti autentici", implicitamente la disciplina abdica alla sua funzione di essere occasione essa stessa di costruzione di competenze

Se non si ritiene questo, è opportuno interrogarsi, nell'affrontare la disciplina, su quali approcci siano funzionali alla costruzione di competenze.

Le equazioni prima delle equazioni
I) scuola primaria

Quanto fa 3+5? 3+5=...

Ho un numero incognito: un problema, che si traduce in un'equazione, la cui soluzione richiedere una procedura, per produrre un "risultato".

...ma è con le operazioni inverse che ci si avvicina di più a quello che pensiamo sia un'equazione:

Qual è quel numero che sommato a 3 dà 5?

$$x + 3 = 5$$

Anche qui ci si aspetta una procedura, per produrre un “risultato”:

$$x = 5 - 3 \qquad x = 2$$

Nel caso della moltiplicazione c’è un salto di astrazione...

Qual è quel numero che moltiplicato a 3 dà 5?

$$x \cdot 3 = 5 \qquad x = \frac{5}{3}$$

cioè 5:3, lasciato indicato! Ci si aspetta unicamente uno spostamento dei simboli presenti, ma non una procedura che produca un *nuovo* risultato; si lascia indicata un'operazione.

OSS: La stessa cosa avviene quando diciamo $x = \sqrt{3}$, oppure $x = \log 3$, ecc. .

Equazioni a più incognite: formule per perimetri, aree volumi,...

$$2p = l_1 + l_2 + l_3; \quad 2p = 2l + l_1; 2p = 3l$$

"applicare" una formula significa di fatto risolvere un sistema:

$$\begin{cases} 2p = l_1 + l_2 + l_3 \\ l_1 = 5 \\ l_2 = 12 \\ l_3 = 13 \end{cases}$$

Fomule “inverse”

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} \qquad h = \frac{2A}{B+b} = \frac{A}{\frac{B+b}{2}}$$

$$B = \frac{2A}{h} - b \qquad \ldots$$

...se avessimo a disposizione i “principi di equivalenza”...

Problema aperto: quando introdurli? Come?

O in alternativa: i principi di equivalenza sono necessari per invertire le formule?

Le equazioni prima delle equazioni
II) scuola secondaria (di primo grado)

- problemi con unità frazionarie (in un rettangolo la base è i 3/5 dell'altezza e il perimetro misura 32 cm...)

- problemi con proporzioni (tre semplice, tre composto...)

- trovare un multiplo intero di un numero decimale x che sia un numero intero (qui l'incognita non è il numero, che si conosce, ma la sua rappresentazione in frazione: x=1,2; 10x=12; x=12/10...)

Le equazioni prima delle equazioni - III) scuola secondaria (di secondo grado)

Scomporre in fattori

$$x^2 - 3x + 2 = (x - \alpha)(x - \beta)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha \cdot \beta = 2 \end{cases}$$

Sistema di *equazioni diofantee.*

...ma il calcolo letterale è un prerequisito necessario?

Equazioni e calcolo letterale nella storia

- Babilonesi (circa 2000 a.C.) - primi esempi di equazioni di primo e secondo grado

- Diofanto (III-IV sec. d.C:) - ricerca di soluzioni intere

- Brahmagupta (598 - 668) - studio sistematico di equazioni di primo e secondo grado

- Al Khwarizmi (780 - 850) - approfondisce il lavoro di Brahmagupta

- Viète (1540 - 1603) 1591: *Isagoge in artem analyticam* (inizio del calcolo letterale)

Il calcolo letterale è un falso prerequisito per le equazioni!

Che cosa è un'equazione?

(...ma una definizione è così necessaria?...)

Possiamo dire che *un'equazione è un enunciato in forma di uguaglianza.* (...ma non serve dirlo subito!)

quando due equazioni sono equivalenti?

$x - 1 = 0$ e $(x - 1)^2 = 0$ sono equivalenti?

Invertire le formule senza l'uso esplicito dei principi di equivalenza

Voglio invertire la fomula

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

rispetto a B. Ripercorro il cammino che da B porta ad A:

$$B \xmapsto{+b} B+b \xmapsto{\cdot h} (B+b)\cdot h \xmapsto{:2} (B+b)\cdot h : 2 = A$$

a ritroso:

$$A \xmapsto{\cdot 2} 2A \xmapsto{:h} \frac{2A}{h} \xmapsto{-b} \frac{2A}{h} - b = B$$

Non si usano i principi di equivalenza, ma si fa esperienza sul significato di

- funzione composta
- funzione inversa
- inversione di una funzione composta

...e sono tutti concetti importanti per la costruzione di competenze matematiche!

I principi di equivalenza sono difficili: perché?

Si noti la differenza:

Sommando ad ambo i membri di un'equazione una stessa espressione, si ottiene un'equazione equivalente (..."lo stesso risultato" dicono gli allievi...)

Si portano a sinistra tutti i termini con la x e a destra tutti i termini noti; se si sposta un termine da un membro all'altro bisogna cambiarlo di segno.

OSS. $x + 1 = 1$ e $x + 1 + \dfrac{1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x}$ non sono equivalenti!

a) $241-(7-9x)=14-2x$

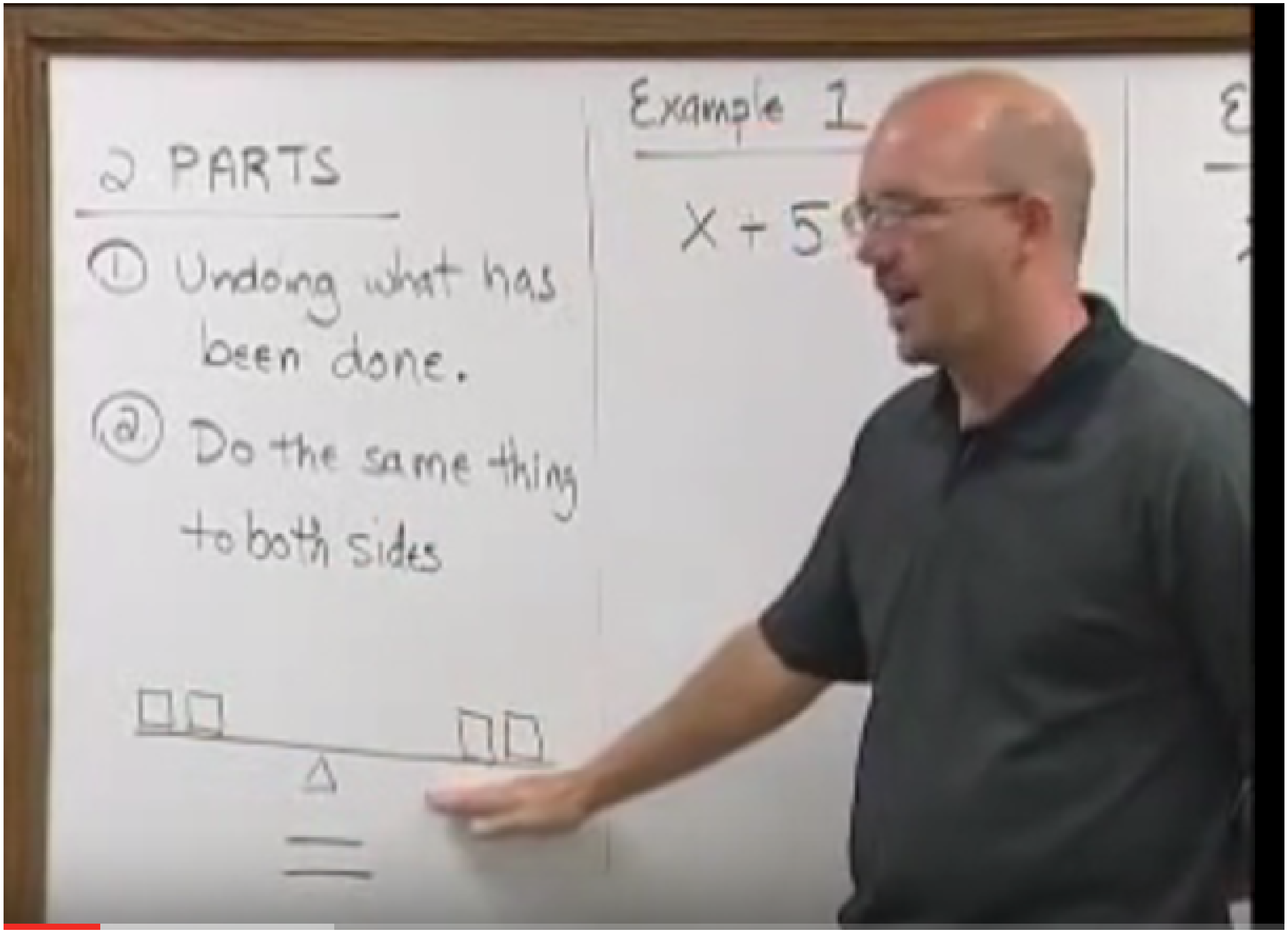
$$241-7+9x=14-2x$$

$$234+9x=14-2x \quad |+2x$$

$$234+11x=14 \quad |-234$$

$$11\cdot x=-220 \quad |:11$$

$$x=-20$$


2 PARTS
① Undoing what has been done.
② Do the same thing to both sides
Example 1
X + 5

Sistemi lineari (determinati)

$$AX = B$$

...è un'equazione di primo grado vettoriale, e si risolve "nello stesso modo": moltiplicando *a sinistra* per l'inversa della matrice A:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

(i quattro metodi risolutivi, le competenze...)

Le equazioni di secondo grado

I radicali: un altro falso prerequisito

Che cosa è la radice quadrata di 2?

... è un numero che elevato al quadrato dà 2:

$x^2 = 2$, ovvero un'equazione di secondo grado!

In generale un radicale è una soluzione di un'equazione *binomia* $x^n = a$, con $n \geq 2$.

Equazione pura - spuria - completa

Spuria.

Gli studenti oppongono resistenza ad applicare la legge di annullamento del prodotto: perché?

Forse dare due valori diversi alla stessa variabile crea reistenze e difficoltà? L'aspetto logico delle equazioni di secondo grado emerge con forza.

OSS: le scritture "$x^2 = 2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$" e "$x^2 \neq 2 \Longrightarrow x \neq \pm\sqrt{2}$" sono incoerenti! (Leggi di De Morgan)

Completa.

...a un certo punto "spunta" una formula...

$$x \text{ (oppure } x_{1/2}) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Occorrerebbe una riflessione approfondita sul valore formativo (verso le competenze) di vedersi calare dall'alto una formula come questa, storicamente formalizzata dopo più di tre millenni di pratica sulle equazioni di secondo grado (le prime di cui si ha notizia risalgono all'era babilonese, 2000 a.C.).

Su molti libri di testo si legge:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

si moltiplica per 4a:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

si aggiunge e si toglie b^2:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - b^2 = 0$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$\cdots$$

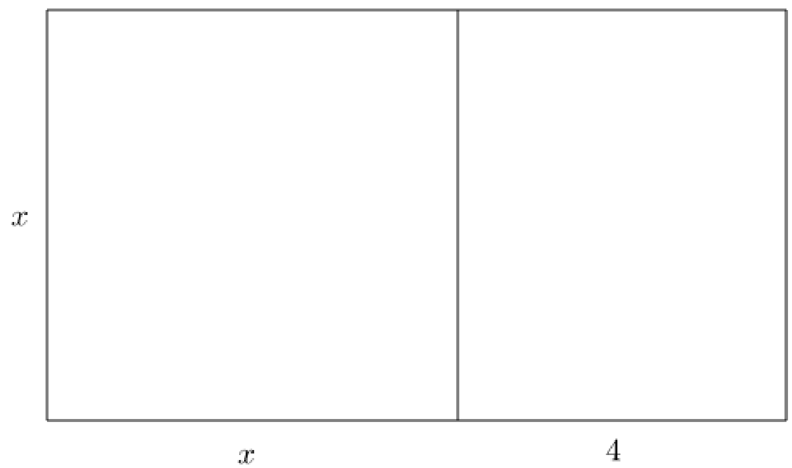
Cosa c'è che non va in questa dimostrazione?

E' matematicamente ineccepibile, ma è didatticamente disastrosa, a causa di due passaggi "cabalistici":

1. moltiplicare per $4a$

2. sommare e sottrarre b^2

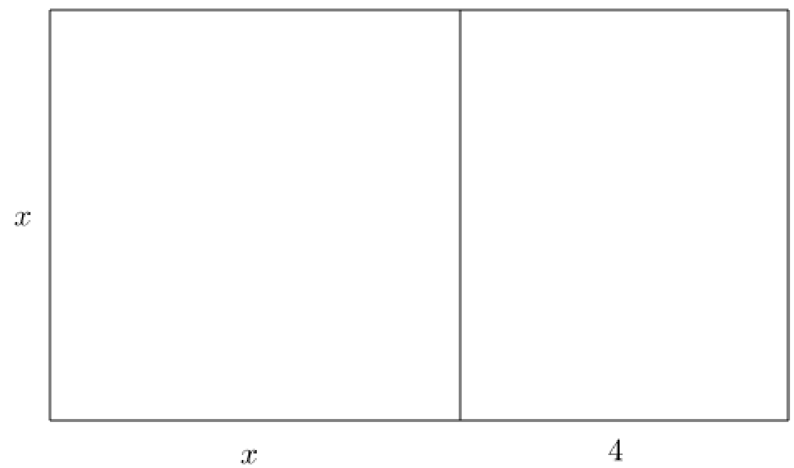
Proposta: Trova le dimensioni di un rettangolo di area 45 cm^2, la cui base supera di 4 cm l'altezza.



$$x(x+4) = 45$$

$$x^2 + 4x - 45 = 0 \Longrightarrow (x+9)(x-5) = 0$$

Stesso problema con area di 50 cm^2.



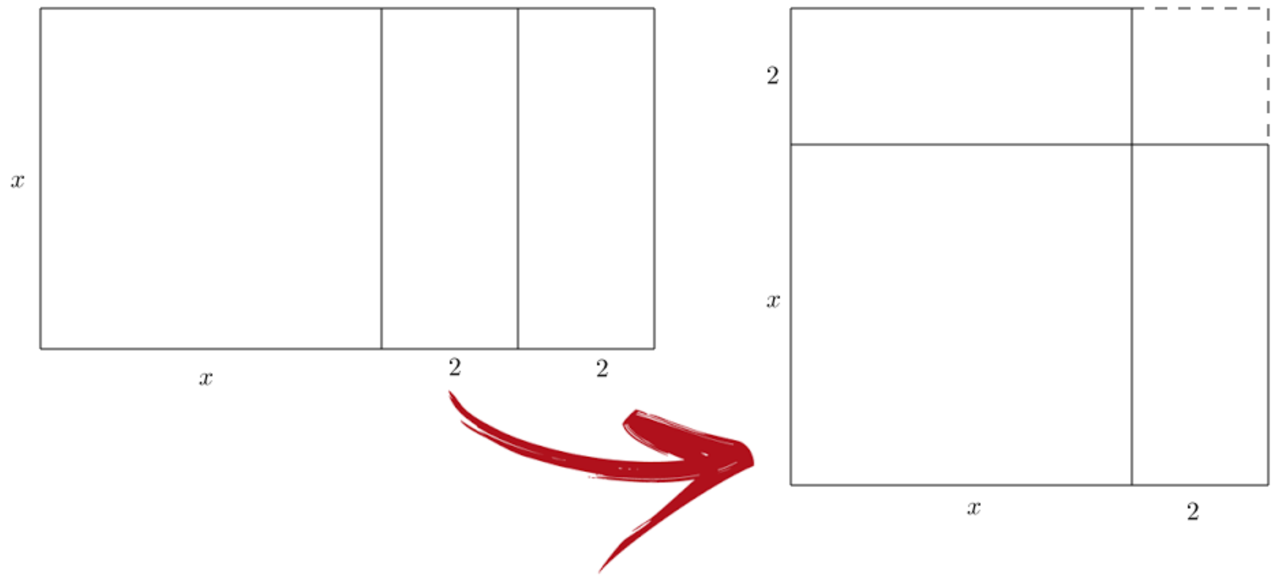
...un po' più di 5 cm.... 6 è troppo...

Modifichiamo la forma della figura, di area

$$x(x+4) = x^2 + 4x$$

in modo tale che x **compaia una sola volta**

(Suggerimento di uno studente!)



completamento del quadrato (metodo antichissimo!)

$$(x+2)^2 - 2^2 = 50$$

$$(x+2)^2 - 2^2 = 50$$

Come si ricava la x? (...prove ed errori...)

$$(x+2)^2 = 50+4$$

$$x+2 = \pm\sqrt{54}$$

$$x = -2 \pm 3\sqrt{6}$$

Il *completamento del quadrato* per ricavare, a partire dall'equazione

- il vertice di una parabola (basta la x!)

- centro e raggio (se esiste) di una circonferenza

Una difficoltà inaspettata:
la metà di una frazione!

$$3x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = 0$$

Chi è la metà di $\dfrac{5}{3}$?

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$\ldots$$

2° PRINC

:2

$$2x^2-3x=4$$

$$x^2-\frac{3}{2}x=2$$

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2=2$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}=\pm\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+2}$$

$$x-\frac{3}{4}=\pm\sqrt{\frac{9}{16}+2}$$

$$x-\frac{3}{4}=\pm\sqrt{\frac{9+32}{16}}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{41}{16}}+\frac{3}{4}$$

ZENUS

$$x^2 + y^2 + 1x - 3y - 18 = 0 \qquad C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$82 \to 2,\ 41$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 18 = 0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = 18 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}$$

$$r = \sqrt{\frac{82}{4}} \qquad \frac{\sqrt{82}}{2}$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{72+1+9}{4}}$$

Applicando meccanicamente la formula risolutiva

- dovremo far proliferare di inutili formule la geometria analitica (immagine fuorviante della matematica)

- non cogliamo l'occasione per accertarci che si sappia individuare la metà di 5/3, e non faremo esercitare su questo

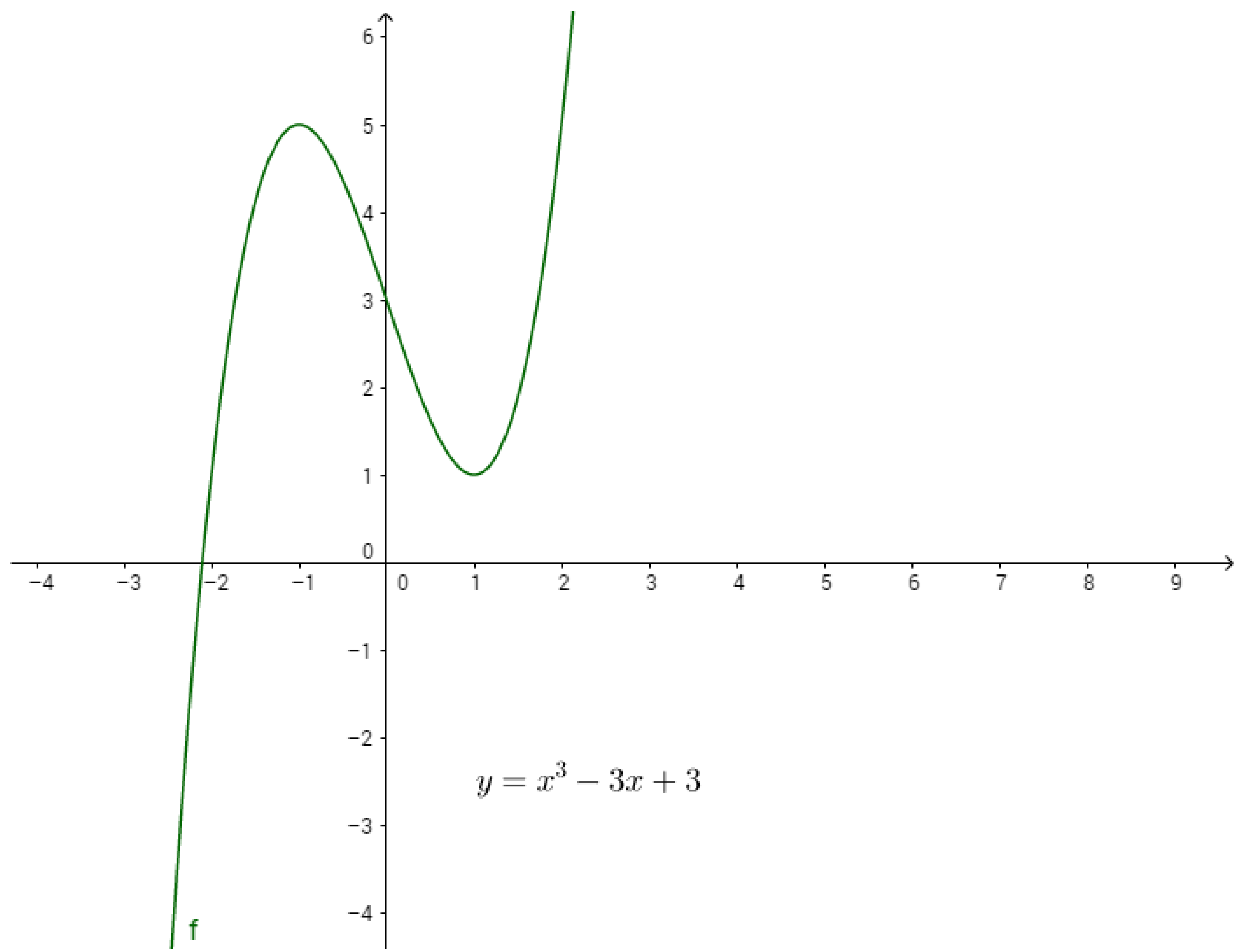
Che cosa è più funzionale all'acquisizione di competenze?

...e non finisce qui...

- problema della risolubilità per radicali (teorema di Ruffini-Abel sulla non risolubilità delle equazioni di grado superiore al quarto, problema della ciclotomia, della costruibilità con riga e compasso...)

- zeri di una funzione: esistenza, numero e individuazione approssimata... (uso delle derivate per ragionare, per trarre conclusioni,...)

- ...



6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
f
$y = x^3 - 3x + 3$

Equazioni impossibili

Equazioni “impossibili” del tipo

$$x^2 + 1 = 0 \text{ e } 1 = 0$$

non sono dello stesso tipo:

- nel primo caso l’impossibilità è legata all’insieme in cui si cercano le soluzioni

- nel secondo si potrebbe parlare di una sorta di contraddizione logica...

... ma se imposto un sistema del tipo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

...le due rette si incontrano o no?

E' questa la bellezza della matematica: abbiamo appena finito di dire che una certa cosa non si può fare... e poi si trova un nuovo contesto in cui ciò che sembra impossibile acquista un senso e si può fare; l'impossibile è sempre relativo!

GRAZIE PER L’ATTENZIONE