SENSIBILITÀ NUMERICA

appunti di Walter Maraschini

L'importanza dell'autostima

Come è noto, la matematica è un aggregato di sottodiscipline (geometria, aritmetica, probabilità, algebra, teoria dei grafi, …) che tra loro dialogano soprattutto per via del metodo fondativo che le accomuna, di tipo ragionativo e dimostrativo.

Naturalmente, sul piano didattico – così come anche dichiarano le indicazioni curricolari nei vari ordini e gradi – è opportuno che affiori tale varietà dei contenuti, così come è necessario che le strategie di apprendimento/insegnamento non si riducano a esposizione di teorie o teoremi bell'e pronti o a esercizi ripetitivi, ma si incontrino con i processi di costruzione dei concetti e pratiche didattiche attive che facciano vivere la continua dialettica "astrazione-applicazione" che caratterizza la ricerca matematica.

Tuttavia, il tema "numeri" svolge un ruolo particolare, non tanto perché la matematica si esaurisce in questo tema, ma per il ruolo che la padronanza del calcolo e una certa sensibilità numerica ha nella visione che un individuo ha della propria "abilità matematica".

Sugli individui si riflette infatti l'opinione corrente (distorta) che la matematica sia un fatto di "numeri" e quindi l'*autostima matematica* si fonda prevalentemente sulla competenza numerica. Ciò è particolarmente importante perché, come colui che afferma «io la matematica non la capisco e non la capirò mai» è portato a non affrontare quegli sforzi intellettivi che talvolta sono necessari per comprendere e quindi autoinvera quell'affermazione, chi ha un'autostima positiva è maggiormente predisposto all'apprendimento.

Nella scuola vige un circolo di autoinveramento che ogni insegnante conosce: di fronte a una prova negativa oppure a un concetto o procedura non o mal compresi, lo studente facilmente si scoraggia e può a quel punto ritenere inutili i suoi sforzi e il suo studio, allontanandosi così ancora di più dalla possibilità di comprendere e precipitando così davvero nella situazione di "non capire più nulla".

La competenza numerica è in primo luogo sensibilità numerica

A torto o a ragione, il possesso di competenze numeriche appare quindi essere il perno attorno al quale un individuo acquisisce l'idea di essere o non essere "matematicamente competente" o, con linguaggio più ingenuo e immediato, "portato o meno per la matematica".

A ogni livello scolare, la competenza numerica va quindi considerata come fondamentale per l'acquisizione del grado soggettivo di competenza matematica generale, anche se ciò non è in effetti un dato assoluto, posto che matematici eccelsi facilmente sbagliano i calcoli e, per paradosso, un buon geometra può non aver bisogno di numeri.

Occorre quindi che si formi una competenza numerica il cui primo stadio è il formarsi di una *sensibilità numerica*.

«Sensibilità» è un concetto interessante, che trova una definizione precisa in fisica e analoga in psicologia: in fisica, per sensibilità di uno strumento di misura si intende la minima differenza che lo strumento è in grado di rilevare: così, un righello che abbia tacche scandite di un millimetro ha una sensibilità di 1 mm. Da un punto di vista psicologico, il concetto è ovviamente più sfumato; tuttavia, si può analogamente affermare che una persona "sensibile" è quella che sa percepire le minime differenze d'umore o di stato di un'altra persona.

La sensibilità numerica si articola in diversi momenti, a seconda del contesto numerico di riferimento.

A livello di scuola primaria, nell'ambito dei numeri naturali, l'ordinamento, il confronto e la sensibilità sull'ordine di grandezza possono essere formate anche con esperienze di laboratorio in classe: *quanti spaghetti sono un etto? quanti chicchi di riso in un pacchetto da mezzo chilo?*

Si può però raggiungere un livello più raffinato di *sensibilità numerica*. A livello di scuola secondaria di primo grado tale sensibilità deve acuirsi, ma si sovrappone un problema forte che coinvolge il concetto di rapporto, concetto che induce ad abbandonare una *mathematica felix* (prevalentemente giocosa e "vicina" ad esperienze sensibili) e costringe ad affrontare un difficile nodo concettuale proprio in una fase scolare e in un'età in cui molto diversificati sono i livelli di maturazione dei ragazzi (da queste difficoltà, forse, la *vulgata* della scuola media come l'anello debole del sistema scolastico italiano).

Naturalmente una sensibilità numerica che sfoci in una competenza numerica deve saper coniugare l'assetto teorico della matematica – la sua sistemazione – con le necessarie e ineludibili tappe dell'apprendimento e va segnalato che esistono significative esperienze di insegnamento che coniugano concetti a motivazioni, attività anche ludiche, soprattutto a livello di scuola primaria.

Ed è bene che tali attività che fuoriescono dallo schema lezione+interrogazione siano diffuse, discusse e sperimentate, anche "rischiando" momentanei ritardi sullo sviluppo del programma.

È bene anche che, allo stesso tempo, l'attenzione che si presta agli errori più diffusi dei ragazzi (anche in anni scolastici successivi a quelli in cui è stato introdotto un concetto) si trasformi in analisi e correttivo per una migliore didattica.

Faccio alcuni esempi, un po' a ruota libera, non con l'intenzione di essere esaustivo, ma soltanto per dare l'idea di come sarebbe interessante e utile *un'antologia* di esperienze, osservazioni e attività che nascono dalla pratica didattica e da una riflessione su essa. Ciò non necessariamente per predisporre e confezionare un'unità didattica, ma per mettere in circolo *idee*.

a) *Sui numeri naturali*

Da molti partecipanti al gruppo di lavoro è stato sottolineato come perda sempre più importanza il calcolo "con carta e penna" (qualcuno ha proposto anche che lo si abolisca del tutto) rispetto al calcolo mentale o con l'uso della calcolatrice, sui quali vanno comunque predisposte piste di insegnamento.

Sul calcolo mentale si è avanzata l'ipotesi che alcuni bambini abbiano proprie strategie difficilmente comunicabili (e in tal caso le si lascino operare); se tuttavia non sono presenti strategie particolari, è stato suggerito da più parti di far lavorare molto con i complementari a 10, a 100 o altri numeri; a ciò è d'aiuto il conteggio iniziale con le dita (giacché le dita piegate rappresentano il completamento a 10 del numero esibito), ma possono anche essere predisposti giochi appositi, del tipo *Memory*, in cui sparsi appositi biglietti su un tavolo, occorre cercare le coppie di numeri complementari, per esempio a 10.

Va anche esercitato un lavoro sul doppio, sulla metà e sul quadrato (con elencazione dei numeri quadrati perfetti) anche per far eseguire mentalmente in modo semplice divisioni e moltiplicazioni per 5.

Infine, le particolarità dello zero devono essere evidenziate in modo netto – aumentando proporzionalmente gli esercizi che lo coinvolgono –, ricordando che lo zero ha sì particolari proprietà, ma è pur sempre un numero, che non va confuso con "niente", "nulla" o altre cose extra-numeriche. È evidente che le difficoltà con lo zero risentono anche di un irriflesso *horror vacui*, che si ritrova anche a livello adulto (perché 0 assenze si indicano spesso con un trattino(/) anziché con uno 0?); ma se si utilizza il termine "niente" per il risultato di $a - a$ e magari ancora "niente" per a/a, si confondono soltanto le idee (come confonde le idee il verbo "semplificare" adoperato indifferentemente nei due casi precedenti).

a) *Sui numeri razionali*

È noto quanto il concetto di rapporto causi molte difficoltà a più livelli. I motivi sono intrinseci e vari: in primo luogo perché esso riassume in sé un processo di astrazione effettivo (da due grandezze se ne ricava una; dallo spazio e dal tempo vien fuori la velocità; dal peso e la massa la densità, …); in secondo luogo perché anche le determinazioni numeriche di un rapporto si presentano in modo diversificato e, come è noto, non semplice risulta l'equivalenza tra numeri decimali, frazioni e percentuali. A parte l'ovvio suggerimento di fare molti esercizi di conversione e di rappresentazione sulla retta, va incoraggiata una buona pronuncia dei numeri decimali affinché le frazioni decimali siano sempre presenti. Perciò 1,5 non va letto come "uno virgola cinque", ma come "uno e cinque decimi" e 1,50 va letto come "uno e cinquanta centesimi". Analogamente, va precisato che la parola "percento" significa "per *ogni* cento" e quindi x% può tranquillamente essere scritto come x/100 e *trattato come una frazione*, forse abolendo o comunque fortemente attenuando il ruolo delle proporzioni, che altro non sono che uguaglianze di rapporti.

Va osservato che il passaggio dalla frazione (o percentuale che sia) al numero razionale non è banale perché la prima opera sempre *su* qualcosa (i 3/4 di…) mentre il secondo si autonomizza; non appare quindi inutile (a livello di scuola media, naturalmente) il parlare di "classi di frazioni equivalenti" perché effettivamente i rapporti sono così multiformi perché di classi si tratta: il concetto, qui, aiuta a comprendere le molte forme in cui essi possono essere rappresentati. Tra l'altro va smitizzato il fatto che il calcolo con le frazioni sia più complicato; nelle situazioni moltiplicative è molto più semplice. Per esempio, ora che 1 euro vale circa 1,33 dollari lo si può approssimare a 4/3 di un dollaro e la conversione inversa (3/4) è immediata.

b) *Sui numeri relativi*

Anche in questo caso numerosi sono gli esempi e le attività che si possono presentare (dalla temperatura ai debiti, eccetera), ma credo siano come sempre più decisive quelle esperienze che coinvolgono il corpo oltre che la mente; perciò x passi avanti e y passi indietro in una sorta di balletto che coinvolga tutta o parte della classe può essere una divertente e istruttiva esperienza.

Naturalmente, poiché la matematica è matematica e non un brandello di realtà, non c'è esperienza che conduca alla regola dei segni nella moltiplicazione anche se stratagemmi linguistici possono aiutare la memorizzazione (è stato citato come esempio di + · – = –: "l'amico del nemico è mio nemico") e un foglio bicolore che si gira a ogni "meno" può dare una mano.

c) *Sulla scomposizione in fattori primi*

I numeri interi (anche quando sono termini di una frazione) è bene scriverli il più possibile scomposti in fattori primi. I ragazzi devono arrivare alla consapevolezza che la scomposizione in fattori primi è l'identikit di un numero intero e ciò li aiuta non soltanto per determinare MCD e mcm (sui quali si possono inventare molti problemi), ma li aiuterà anche in molte altre situazioni (per esempio, anche per estrarre radici, se necessario). Va comunque fatto capire che la scomposizione in fattori primi è una procedura oggettivamente complicata (sulla difficoltà della scomposizione si basano i più moderni sistemi di crittografia) e, quando la si fa con il tradizionale procedimento, è bene provare *nell'ordine* i numeri primi (dal 2 in poi) utilizzando i criteri di divisibilità standard (per 2, 3, 5, 11) che, se non conosciuti, *possono essere fatti scoprire*.

Può poi essere fatto un gioco (chiamiamolo Crucifat) in cui si cercano i fattori in modo che i prodotti diano i numeri in testa alla riga e alla colonna, come per esempio

	154	30	45
18			
165			
70			

di cui la seguente tabella è soluzione

	154	30	45
18	2	3	3
165	11	5	3
70	7	2	5

d) *Sulla catalogazione degli insiemi numerici (**N, Z, Q, R**)*

Gli oggetti della matematica sono strumenti concettuali costruiti per risolvere problemi. È opportuno, quindi, che anche gli insiemi numerici siano presentati – con tutte le occasioni di gioco e di motivazione che i docenti sanno inventare – come ambienti distinti: i naturali (**N**) per contare, gli interi relativi (**Z**) per temperature, avanzi o disavanzi, i razionali (**Q**) per misurare, … gli irrazionali, con cautela, per assicurare la continuità della retta – e forse soltanto alla metà della scuola media. La catalogazione non è finalizzata a sé stessa, ma è utile perché educa a far comprendere come ogni oggetto matematico è inserito in un ambiente; occorrerebbe sempre far comprendere che la risoluzione di un’equazione ha senso *all’interno di un determinato ambiente numerico*, perché in alcuni ambienti può avere soluzioni, in altri no – e da ciò dipende la risolubilità dei problemi. Come ulteriore esempio, si consideri la scomposizione in fattori di un polinomio (da cui in sostanza dipende la risolubilità delle equazioni polinomiali): $x^2 - 2$ è scomponibile? In **Q** no, in **R** sì, e banalmente: $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ (su alcuni testi si dice che invece non è scomponibile perché, pur avendo introdotto i numeri reali, poi … sono scomparsi).

e) *Sul calcolo letterale*

Qua va distinto: l’uso di lettere come rappresentanti generali di numeri va incoraggiato e utilizzato anche precocemente (si deve sapere presto che se n rappresenta un qualunque numero naturale, allora $2n$ è un numero pari), anche per permettere di risolvere facili equazioni numeriche derivanti da problemi; il vero e proprio *calcolo letterale* in cui – attenzione – gli oggetti effettivi di studio e manipolazione non sono più numeri (sia pure generici), ma monomi e polinomi che si autonomizzano dai numeri divenendo oggetti di un altro ambiente (l’anello dei polinomi in una o più indeterminate) non è previsto che si svolga nella scuola secondaria di primo grado, tanto che le indicazioni per il primo biennio della scuola secondaria di secondo grado dicono esplicitamente che va operato questo graduale passaggio al calcolo algebrico. Non si capisce pertanto la tenacia con la quale insegnanti e libri di testo inseriscano questo argomento nell’ultimo anno della media. Occorre tenere presente che talvolta l’anticipazione di un tema può essere dannoso – e questo è il caso.

f) *Sul metodo*

Certamente, esperienze laboratoriali possono essere utili, ma non è detto che siano risolutive. Non è facile l’incontro tra leggi matematiche, anche sensate, e semplificazioni rozze che l’esperienza ingenua induce.

Ovviamente, nell’esperienza didattica, tutto può essere trasformato in gioco – ed è un bene –, molte sono le motivazioni che si possono innescare –ed è un bene trovarle. Non va tuttavia trascurato che ci sono comunque delle vere e proprie barriere cognitive che sono più forti dei “normali” ostacoli relativi all’apprendimento di un nuovo concetto o strumento.

Per esempio, l’introduzione dei numeri relativi (**Z**) può creare difficoltà in qualche alunno, ma non costituisce una forte barriera cognitiva, come invece – come accennato in precedenza – l’introduzione dei numeri razionali (**Q**).

Roma maggio 2013