LA PROBABILITA' AL BIENNIO: TRA MISCONCETTI E POTENZIALITA'

MAURIZIO BERNI

maurizio.berni@istruzione.it

QUALE DEFINIZIONE DI PROBABILITA'?

Approcci:

- Classico (difficoltà legate alla definizione “circolare”)
- Frequentista (difficoltà legate al rischio di misconcezioni)
- Soggettivista (intuitivo, ma difficile da accettare come definizione matematica)
- Assiomatico (non adatto all'età – siamo al biennio - tuttavia in geometria spesso non si esita ad usarlo....)

...ma quello della “definizione” non sembra un vero problema didattico (o almeno non subito) ....

LA CONCEZIONE INTUITIVA DI PROBABILITA'

…perché, ponendo semplici problemi di probabilità, i ragazzi hanno uno schema ingenuo corretto per affrontarli, a differenza di altre branche della matematica, nelle quali occorre conoscere strumenti appropriati (come nel calcolo di aree e volumi, utilizzo del teorema di Pitagora, “calcolo letterale”, ecc.)

Così, chiedendo cosa succede lanciando una moneta o un dado (non truccati) emergono immediatamente delle risposte corrette (nel primo caso, spesso in %, nel secondo caso, più difficile da esprimere in %, nelle tanto odiate frazioni...)

E' una concezione su cui si può lavorare, priva di misconcetti a questo livello; non è come in fisica, quando si lega ingenuamente la forza con la velocità....

A QUALE DEFINIZIONE CI SI AVVICINA DI PIU'?

La concezione ingenua ha in sé degli aspetti che si legano direttamente alla ***definizione classica*** (viene spontaneo fare un rapporto)

...ma non necessariamente “contando” tutti i casi possibili e quelli favorevoli (si pensi all'uscita di un numero pari nel lancio di uno o di due dadi), il che può far pensare a un ragionamento di tipo ***frequentista***...

...e il “prevedere” un risultato senza effettuare l'esperimento fa pensare a un approccio ***soggettivista***.

Infine, si può certamente confidare nel fatto che affrontando i problemi in modo strutturato vengano fuori in modo naturale aspetti legati all'approccio ***assiomatico***.

NASCONO I PRIMI PROBLEMI...

PROVA A.S. 2010-2011

CLASSE TERZA SEC. I GRADO

D11. **Per scegliere chi deve lavare i piatti del pranzo, Marco, Lorenzo e Livia decidono di lanciare due volte una moneta da 1 euro come quella che vedi in figura:**

Testa

Croce

Stabiliscono che:

- **se verranno 2 croci, laverà i piatti Marco;**
- **se verranno 2 teste, laverà i piatti Livia;**
- **se verranno una testa e una croce, laverà i piatti Lorenzo.**

NASCONO I PRIMI PROBLEMI

a. Pensi che tutti e tre abbiano la stessa probabilità di lavare i piatti?

☐ Sì 64,9% Mancata risposta: 1,8%

☐ No * 33,3%

b. Giustifica la tua risposta.

Errata 71,6%

Corretta 16,6%

Non risponde 11,8%

NASCONO I PRIMI PROBLEMI

Quando si chiede la probabilità che nascano

- Due figli maschi
- Due figlie femmine
- Un maschio e una femmina

La concezione ingenua fallisce clamorosamente, tendendo a considerare equiprobabili i tre eventi; anche in adulti esperti....

…. e soprattutto quando i due fratelli sono gemelli.

Questo esempio mostra l'opportunità di affrontare i problemi di probabilità con strumenti opportuni che guidino il ragionamento, inizialmente corretto, a proseguire in maniera logica e consequenziale (tabelle, diagrammi ad albero, ma anche polinomi...)

I PROBLEMI SI AGGRAVANO...

E se non si interviene con l'educazione, si arriva a credere a fatti e fenomeni del tutto inesistenti, come quello dei “numeri in ritardo” che possono portare le persone più ingenue anche alla rovina; basta solo questo esempio per capire che una cultura di base della probabilità è essenziale per l'esercizio di una cittadinanza responsabile.

Il grande matematico Bruno De Finetti affermò che il gioco del lotto era una “tassa sulla stupidità”; la scuola ha il dovere di emancipare i futuri cittadini da questa tassa, facendo rientrare il gioco d'azzardo nell'alveo di ciò che deve essere: un gioco.

MA RIPARTIAMO DALL'INIZIO:
GLI EVENTI ELEMENTARI

DALLE LINEE GUIDA PER I TECNICI E PROFESSIONALI:

"Calcolare la probabilità di eventi elementari."

Ma cosa sono gli *eventi elementari*?

ESEMPIO DI SPAZI DI EVENTI ELEMENTARI: {1,2,3,4,5,6}.

C'è un problema di formalizzazione, perché gli eventi sono *sottoinsiemi* e gli eventi elementari sono i *singoletti*, cioè i sottoinsiemi di un solo elemento. La loro equiprobabilità è data per scontata.

{1,2,3,4,5,6} è lo spazio degli eventi elementari o un singolo evento (l'evento certo)?

MA RIPARTIAMO DALL'INIZIO: GLI EVENTI ELEMENTARI

Altro esempio: $\{b_{1,} b_{2,} b_{3,} r_{1,} r_2\}$

(estrazione di una pallina da un sacchetto contenente 3 palline blu e due rosse, indistinguibili al tatto).

In questo caso le palline sono indistinguibili, a parte il colore; quindi non è questo lo spazio "percepito" degli eventi elementari, ma questo: $\{B, R\}$, dove $B = \{b_{1,} b_{2,} b_3\}$ e $R = \{r_{1,} r_2\}$

Cioè non si percepisce un evento *più elementare* di questi:

"Estraggo una pallina blu", "Estraggo una pallina rossa".

Ovviamente gli eventi non sono equiprobabili e anche questo è correttamente percepito dai ragazzi.

MA RIPARTIAMO DALL'INIZIO: GLI EVENTI ELEMENTARI

Altro esempio: $\{TT, TC, CT, CC\}$

(Testa o Croce con due monete, i in due lanci successivi della stessa moneta).

non è questo lo spazio "percepito" degli eventi elementari, ma questo: (TT, TC, CC)

Cioè non si percepisce un evento *più elementare* di questi:

"Due teste", "Due croci", "Una Testa e una Croce".

Qui, al contrario delle palline, non viene percepita la diversa probabilità di questi eventi.

MA RIPARTIAMO DALL'INIZIO: GLI EVENTI ELEMENTARI

La necessità di ricorrere ad eventi elementari non equiprobabili emerge più chiaramente con la moneta truccata:

gli eventi elementari sono due, ma qual è la loro probabilità?

Lancio la moneta molte volte..... (approccio frequentista)

...finché non mi sento di poter "scommettere" (approccio soggettivista, basato sulla corretta percezione della "Legge dei grandi numeri")

EVENTI ELEMENTARI E CONFRONTO DI PROBABILITA' (ANCHE SENZA CALCOLARLA...)

Lancio due dadi: è più probabile che esca il numero 5 o il numero 7? (sottinteso: facendo la somma dei punteggi dei due dadi)

Soluzioni del tipo

“(1+4) e (2+3) sono due casi; (1+6), (2+5) e (3+4) sono tre casi; quindi è più probabile che esca il 7”

Sono accettabili? (Confronto di grandezze e loro misura...)

Quale “spazio degli eventi elementari” implicito hanno i ragazzi che effettuano questo ragionamento? Quali probabilità hanno questi “eventi elementari”? Sono equiprobabili?

EVENTI ELEMENTARI E CONFRONTO DI PROBABILITA'

Usare le combinazioni senza tener conto dell'ordine non è sbagliato se queste rappresentano tutti gli eventi e se questi sono equiprobabili!

Se avessimo detto: “E' più probabile che esca il numero 4 o il numero 5?”

...allora avremmo potuto “mettere in crisi” il ragionamento, confrontando le probabilità di

(1+3), (2+2) da una parte e di (1+4), (2+3) dall'altra....

Inoltre, nel confronto di probabilità non occorre determinare il numero dei “casi possibili” (frazioni con lo stesso denominatore)

EVENTI ELEMENTARI: VERSO UNA DEFINIZIONE

Un evento è “percepito” come elementare se non lo “vediamo” come somma logica (o unione) di *altri* (c'è qui un elemento *soggettivo*, ad es. identificazione di (1,6) con (6,1) nel lancio di due dadi).

Si costruisce così uno *spazio degli eventi elementari*; essi sono automaticamente *incompatibili*; infatti se due eventi *A e B* non fossero incompatibili, si potrebbe sempre scrivere

$$A=(A\cap B)\cup(A\setminus B) \qquad \text{e} \qquad B=(A\cap B)\cup(B\setminus A)$$

quindi *A e B* non sarebbero elementari.

DAGLI EVENTI ELEMENTARI A TUTTI GLI ALTRI EVENTI

A partire dagli eventi elementari si costruisce l'*algebra* degli eventi, all'inizio solo per *unione* visto che l'intersezione è vuota.
Costruiremo quindi anche eventi (non elementari) *compatibili.*

L'uso del connettivo "e" tra eventi compatibili (quindi non elementari) è associata in modo naturale all'operazione di intersezione (non vuota):

"Lancio un dado ed esce un numero pari "*e*" maggiore di 3"

$$\{2,4,6\} \cap \{4,5,6\} = \{4,6\}$$

USO DEL CONNETTIVO “E”: INTERSEZIONE O PRODOTTO?

Ma si usa il connettivo “e” anche nella seguente situazione:

“lancio due dadi ed escono
il numero 6 “*e*” il numero 2”

Ingenuamente molti ragazzi pensano ad uno spazio degli eventi elementari ricavato per via additiva, tramite l'unione, e percepiscono come eventi elementari le coppie non ordinate, ritenendole equiprobabili (alcuni esprimono le probabilità in dodicesimi...).

EVENTI ELEMENTARI E CONFRONTO DI PROBABILITA'

La tabella

(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6);

(2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6);

(3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (3,6);

(4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (4,6);

(5,1); (5,2); (5,3); (5,4); (5,5); (5,6);

(6,1); (6,2); (6,3); (6,4); (6,5); (6,6);

viene accolta con “sollievo” perché chiarisce molte complicazioni, ma non appare generalmente come una strategia spontanea.

USO DEL CONNETTIVO “E”: INTERSEZIONE O PRODOTTO?

$E_1 =$ “Sul primo dado esce 6”

$E_2 =$ “Sul secondo dado esce 2”

$$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{6}$$

...ma qui E_1 ed E_2 non sono più eventi elementari (se lo fossero, sarebbero anche incompatibili!)

Qui 1/6 va inteso come “6/36”...

USO DEL CONNETTIVO “E”: INTERSEZIONE O PRODOTTO?

$$E_1=\{(6,1);(6,2);(6;3);(6,4);(6,5);(6,6)\}$$

$$E_2=\{(1,2);(2,2);(3;2);(4,2);(5,2);(6,2)\}$$

$E_1\cap E_2=\{(6,2)\}$ evento elementare!

$$P(E_1\cap E_2)=P(E_1)\cdot P(E_2)$$

Si tratta di un intersezione di eventi indipendenti (e compatibili) in uno spazio prodotto

ESAME DI ALCUNI ELABORATI

Analizzare alcuni elaborati per riconoscere:

Qual è la percezione degli eventi elementari

Se l'argomentazione è corretta

Qual è la percezione dello spazio prodotto

ATTIVITA' 2: GALILEO E IL GIOCO DELLA ZARA

Intorno al 1630 alcuni gentiluomini fiorentini dediti al gioco della zara posero a Galileo un quesito. Essi avevano infatti osservato che lanciando tre dadi si ottengono più spesso 10 e 11, come somma dei tre punti, che non 9 e 12. Ciò appariva loro strano dal momento che avevano osservato che quei quattro numeri sono ottenibili come somma di tre numeri da 1 a 6, nello stesso numero di modi.

GALILEO E IL GIOCO DELLA ZARA

Lettura di un brano originale di Galileo.

"E che il 9 e il 10 si formino (...) con pari diversità di numeri , è manifesto; imperrocché il 9 si compone con 1.2.6, 1.3.5, 1.4.4, 2.2.5, 2.3.4, 3.3.3 che sono sei triplicità, ed il 10 con 1.3.6, 1.4.5, 2.2.6, 2.3.5, 2.4.4, 3.3.4 e non in altri modi, che pur son sei combinazioni. (…)

Abbiamo dunque sin qui dichiarati questi tre fondamenti; primo, che le triplicità, cioè il numero delle scoperte dei tre dadi, che si compongono da tre numeri uguali, non si producono se non in un modo solo; secondo, che le triplicità che nascono da due numeri eguali e dal terzo differente, si producono in tre maniere; terzo, che quelle che nascono da tre numeri tutti differenti, si formano in sei maniere."

Dalla lettura del brano risulta che fosse chiaro (agli interlocutori di Galileo) quale fossero gli eventi elementari? La loro equiprobabilità? Lo spazio degli eventi?

LA PROBABILITA' COI POLINOMI

La scrittura polinomiale cerca di rendere evidente la non equiprobabilità tra i casi TT, CC e TC (percepito come indistinguibile da CT); nello stesso tempo fornisce un esempio non geometrico del fatto che

$$(A+B)^2 \neq A^2 + B^2$$

SCHEDE PQM

SCHEDA N. 1

Consegna 1. Maschio o femmina? - Una futura mamma è in attesa di due gemelli; non avendo ancora effettuato l'ecografia per determinarne il sesso, si chiede quali sono le varie possibilità. Se *F* è la probabilità dell'evento "nasce una femmina" e *M* è la probabilità dell'evento "nasce un maschio", quale può essere il significato del polinomio $(M+F)^2$?

Il polinomio $(M+F)^2$, in base al significato di potenza, può essere riscritto come prodotto di due fattori, quale?................................

Applicando la proprietà distributiva, si ottengono quattro monomi, ognuno dei quali rappresenta la probabilità di un certo evento; quali sono questi monomi, e a quali eventi corrispondono?

monomio	Evento corrispondente

SCHEDA N. 2

Consegna 2. - Compro o non compro l'ombrello? In questa consegna aiuteremo Gianni, che vuole fare una gita di due giorni per il fine settimana, a capire se è opportuno acquistare un ombrello, che al momento non possiede. Gianni ha deciso di guardare le previsioni meteorologiche, e di comprare l'ombrello se la possibilità di pioggia supera il 50%. Le previsioni, per ogni giorno, distinguono tre casi:

- pioggia (con probabilità P)
- nuvoloso (con probabilità N)
- bel tempo (con probabilità B)

e pare che queste siano le stesse per entrambi i giorni.

Che cosa rappresenta il polinomio $(P + N + B)^2$?

Sviluppandolo il quadrato come hai fatto nella consegna precedente, che espressione ottieni?

....

SCHEDA N. 2

Qual è l'espressione che rappresenta la probabilità che in almeno uno dei due giorni venga a piovere?...

Se le probabilità sono, rispettivamente, *P*=30%; *N*=35%; *B*=35%, Gianni comprerà l'ombrello? Scrivi qui sotto i tuoi ragionamenti e le tue conclusioni.

LA PROBABILITA' COI POLINOMI
LE TRE “FALSE” ALTERNATIVE

In realtà le alternative ai fini della soluzione del problema della seconda scheda sono due:

Piove (al 30% per ognuno dei due giorni)

Non piove (al 70% per ognuno dei due giorni)

$$1=\left(P+N\right)^2=P^2+2\mathrm{PN}+N^2$$

Prendo l'ombrello se $P^2+2\mathrm{PN}=1-N^2>0,5$

$$P^2+2\mathrm{PN}=1-N^2=1-\frac{49}{100}=\frac{51}{100}>0,5$$

dunque prendo l'ombrello.

Il problema delle parti
(da un'attività di D. Paola)

Ariele e Calibano giocano a testa e croce con una moneta a due facce non truccata. A ogni lancio viene assegnato 1 punto al giocatore che indovina l'esito. Vince tutta la posta di 24 denari (12 dei quali sono di Ariele e 12 di Calibano) chi per primo totalizza 6 punti.
I giochi d'azzardo sono però proibiti a Matelandia e il gendarme Prospero, venuto a conoscenza della partita che si sta giocando, si avvia verso la taverna per arrestare Ariele e Calibano. Informati del pericolo, i due giocatori interrompono la partita sul 5 a 3 per Ariele e fuggono, ciascuno con i 12 denari messi per formare la posta, concordando di ritrovarsi il giorno dopo per dividere equamente la posta in gioco.

IL PROBLEMA DELLE PARTI COI POLINOMI: Ariele o Calibano?

Se vince Ariele il gioco è già finito	A
...ma se vince Calibano si ricomincia... e se dopo Calibano si rigioca e vince Ariele il gioco finisce	CA
… ma se vince ancora una volta Calibano si ricomincia, sono cinque a cinque.... e in questo caso potrebbe arrivare alla vittoria finale sia Ariele che Calibano	$C^2(A+C)=C^2A+C^3$
Quali sono le probabilità di vittoria di Ariele?	$A+CA+C^2A=\frac{7}{8}$
Quali sono le probabilità di vittoria di Calibano?	$C^3=\frac{1}{8}$

ATTIVITA' 5: il problema del Cavaliere di Méré

Nel 1654 Antoine Gomboaud, Cavaliere di Méré, scrisse a Pascal una lettera nella quale poneva il seguente quesito, oggi diventato parte della storia della probabilità, insieme al problema delle parti:

"è più probabile avere almeno un sei lanciando quattro volte un dado o avere almeno una volta il doppio sei lanciando ventiquattro volte due dadi?"

Il problema del Cavaliere di Méré

Primo caso: se *S* è la probabilità che esca il 6 lanciando un dado, e *N* è la probabilità dell'evento complementare, la probabilità che esca almeno un 6 lanciando il dado 4 volte è:

$$(S+N)^4-N^4=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=0{,}5177...$$

Secondo caso: se *S′* è la probabilità che escano due 6 lanciando due dadi, e *N′* è la probabilità dell'evento complementare, la probabilità che escano almeno due 6 lanciando 24 volte i due dadi è (sono comunque numeri molto grossi...):

$$(S'+N')^{24}-N'^4=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=0{,}4914...$$

Il problema di Monty Hall

Il dilemma di Monty Hall

In un popolare show televisivo americano il presentatore mostra al concorrente tre porte chiuse. Dietro a una di esse si cela il premio in palio, un'automobile; le altre due nascondono una capra. Il giocatore sceglie una delle tre porte, poi il conduttore, che sa qual è quella vincente, ne apre un'altra mostrando una capra. A questo punto il concorrente deve fare la scelta definitiva…

…è più conveniente confermare oppure cambiare porta per ottenere il premio?

Il problema di Monty Hall

Coi polinomi: $(V_1+V_2+V_3)(S_1+S_2+S_3)=$

$$=V_1S_1+V_1S_2+V_1S_3+$$

$$+V_2S_1+V_2S_2+V_2S_3+$$

$$+V_3S_1+V_3S_2+V_3S_3$$

V_i è la probabilità che la i-esima sia la porta vincente

S_i è la probabilità che la i-esima sia la porta scelta

La strategia è rendere vincenti i casi V_iS_j con $i\neq j$

ATTIVITA' 6: il problema di Monty Hall

Coi polinomi: $(V_1+V_2+V_3)(S_1+S_2+S_3)(C+N)=$

$$V_1S_1C+\boxed{V_1S_2C+V_1S_3C}+\boxed{V_1S_1N}+V_1S_2N+V_1S_3N+$$

$$+\boxed{V_2S_1C}+V_2S_2C+\boxed{V_2S_3C}+V_2S_1N+\boxed{V_2S_2N}+V_2S_3N+$$

$$+\boxed{V_3S_1C+V_3S_2C}+V_3S_3C+V_3S_1N+V_3S_2N+\boxed{V_3S_3N}$$