Il caso della matematica

Ivan Casaglia, 2005

Da qualche anno, riflettendo sul ruolo che la matematica occupa nel processo educativo, si è cominciato a parlare di *matematica del cittadino*[1], con l' intento di valorizzare il contributo che il suo insegnamento può e deve dare alla formazione della cittadinanza. In questa prospettiva è stato sottolineato che l' educazione matematica contribuisce alla costruzione di strumenti per interpretare criticamente la realtà che ci circonda, per operare scelte sulla base di valutazioni fondate, per coltivare l' intuizione e l' immaginazione. Nello stesso tempo, lo studio sui sistemi educativi dei principali paesi sviluppati, e prima ancora l' esperienza diretta di chi vive nella scuola, hanno fatto emergere i crescenti insuccessi negli apprendimenti, che proprio nella matematica fanno registrare i loro aspetti più drammatici e preoccupanti. E queste difficoltà, e la disaffezione che le accompagna, si fanno particolarmente acute proprio nella fascia di età che corrisponde al biennio della scuola superiore.

A differenza di ciò che forse accade in altre discipline, il problema fondamentale che si incontra nell' educazione matematica nel biennio non riguarda tanto il *che cosa* insegnare, ma il *come* insegnarlo.

Il laboratorio di matematica

Le pratiche didattiche più diffuse si avvalgono prevalentemente di modalità di tipo *trasmissivo*, producendo conoscenze " nominalistiche" , abilità prive di consapevolezza, apprendimenti non duraturi, atteggiamento dogmatico, disaffezione. Per superare questi aspetti negativi, occorre coinvolgere gli studenti in un processo di cui siano in misura maggiore i protagonisti, nel quale cioè non restino solo i destinatari dell' informazione ma svolgano un ruolo attivo nella scoperta delle proprietà e nella costruzione dei concetti.

Parlare di *laboratorio di matematica*, quindi, non significa tanto pensare ad uno spazio fisico (aula) destinato in modo esclusivo alla matematica, quanto piuttosto prospettare un modo diverso di fare didattica (*didattica laboratoriale*), rivolto alla *costruzione* delle conoscenze.

Nel laboratorio di matematica gli studenti devono " imparare ad intuire, immaginare, porsi dei problemi" [2] attraverso l' esplorazione di situazioni problematiche, la ricerca di regolarità, la formulazione di congetture, la loro verifica o confutazione, la loro (eventuale) correzione, la loro (possibile) generalizzazione.

Una didattica laboratoriale non è dunque quella in cui l' insegnante sostituisce il modello trasmissivo dell' insegnamento con modalità più accattivanti (forse) ma nelle quali rimane lui il solo protagonista di fronte alla platea della sua classe, così come non si può impiegare il laboratorio solo per *verificare* le proprietà già " spiegate" dall' insegnante o apprese sul manuale.

Nel laboratorio di matematica le attività partono dall' esame di un problema, lasciando allo studente il tempo di esplorare la situazione che gli viene proposta, cioè di osservare e di riflettere, e successivamente di registrare le proprie riflessioni, di argomentare le proprie scelte e le proprie conclusioni, di metterle a

[1] CREM, *La matematica, dalla scuola materna alla maturità*, edizione italiana a cura di L. Grugnetti e V. Villani, Pitagora editrice, Bologna, 1999.

[2] *Indirizzi per l'attuazione del curricolo nella scuola di base*, Commissione De Mauro, 2001.

confronto con quelle degli altri (i compagni, l' insegnante), di condividere con gli altri la sintesi del lavoro svolto.

Si tratta di una modalità didattica nella quale gli insegnanti svolgono una funzione decisiva, non solo nella individuazione di problemi che siano significativi e stimolanti per coloro a cui sono proposti e nel coordinamento delle diverse fasi di lavoro di ogni singola esperienza. Se non vogliamo trasformare, infatti, queste attività in esperienze improvvisate, frammentarie o episodiche, occorre un lavoro progettuale adeguato da parte degli insegnanti che devono strutturare le singole attività e organizzarle in percorsi didattici coerenti con l' evoluzione e la crescita degli studenti a cui sono rivolte e con le finalità dell' insegnamento.

La matematica nel biennio

Una didattica laboratoriale ha bisogno di tempi distesi ed impone quindi anche un ripensamento dei contenuti. Dovendo sfrondare il repertorio delle cose che si insegnano occorre valutare con attenzione quali sono i temi e gli argomenti che possono contribuire in modo rilevante alla formazione del cittadino.

Nella scuola superiore, per tradizione, il Biennio è stato a lungo dedicato, negli indirizzi scolastici che prevedevano una presenza significativa della matematica, allo studio dell' algebra (calcolo letterale ed equazioni) e della geometria del piano (nella sua versione *razionale*, cioè secondo l' impostazione assiomatico-deduttiva, per distinguerla da quella *intuitiva*, della scuola di base). Le innovazioni curricolari introdotte a partire dalla fine degli anni ottanta (sperimentazioni Brocca, PNI, nuovi programmi nei diversi indirizzi dell' istruzione tecnica e professionale) avevano allargato i contenuti dell' insegnamento matematico ad argomenti innovativi (probabilità, logica, informatica, trasformazioni geometriche). Le ambizioni di quei programmi, il cui limite principale era rappresentato dal loro carattere enciclopedico, si sono scontrati con le resistenze culturali dei docenti e con le difficoltà crescenti dell' insegnamento, producendo un progressivo ritirarsi delle pratiche didattiche più diffuse sul terreno consolidato della tradizione. E poiché nella cultura della scuola italiana si è spesso identificato nel nucleo numerico-algebrico la cosa più importante per la formazione degli studenti, si è finito per far coincidere l' intero insegnamento matematico del biennio, con l' acquisizione di competenze nel calcolo numerico e letterale. Appare del tutto evidente il limite culturale di questa identificazione, in un tempo nel quale l' innovazione tecnologica richiede, anche nel calcolo, competenze affatto diverse dal passato (un uso consapevole e critico degli strumenti automatici di calcolo, che coinvolgono una sensibilità per gli ordini di grandezza e una capacità di stimare i risultati delle operazioni, fino, a livelli più complessi, alla capacità di costruire algoritmi e programmi per il calcolo). Lo stesso esercizio della cittadinanza coinvolge delle capacità di lettura e di interpretazione di dati numerici (prima fra tutti quelli di origine statistica) che vanno ben oltre il tradizionale *far di conto*. Ma al di là del limite culturale, vi è una questione altrettanto importante dal punto di vista didattico, sulla quale si deve riflettere: non è affatto detto (anzi l' esperienza presente sembra proprio mostrare il contrario) che le competenze di calcolo si possano maturare esercitandosi esclusivamente nel calcolo. Ciò che può aiutare lo sviluppo delle competenze numeriche e di calcolo, è il loro esercizio in contesti diversi e significativi per gli studenti, che si possono trovare prima di tutto esplorando gli altri temi dell' educazione matematica. Allo stesso tempo, l' esigenza di un rinnovamento delle pratiche didattiche (v. Laboratorio di matematica) suggeriscono di limitare i contenuti per consentire apprendimenti consapevoli e duraturi. Per fare spazio ad argomenti innovativi e a pratiche didattiche di qualità, occorre quindi fare delle scelte coraggiose. Sono quelle che proviamo a delineare di seguito, articolando i contenuti dell' educazione matematica in quattro grandi temi:

– I numeri e il calcolo;
– Spazio, figure e trasformazioni;
– Dati e previsioni;
– Relazioni e funzioni.

I numeri e il calcolo

Questo è il tema su cui occorre effettuare le scelte più radicali rispetto alla tradizione consolidata. Il Biennio deve segnare il passaggio dal calcolo numerico al calcolo algebrico (inteso come calcolo letterale e studio delle equazioni), che costituisce da sempre uno dei momenti più delicati della formazione matematica. Dopo i primi passi mossi nel calcolo con le lettere, una parte consistente degli studenti, finisce per praticare una manipolazione di segni quasi del tutto privi di significato. Dietro le lettere, le operazioni su di esse, le loro proprietà non si vede niente, e si procede al buio, applicando in modo poco consapevole, tecniche e procedure suggerite dall' insegnante o dal manuale. L' algebra ha un carattere *astratto*, e proprio per questo richiede una maggiore attenzione al *significato* e al *senso* di ciò che si insegna. In questa prospettiva diventa importante fare riferimento in modo continuo al *contesto* attraverso *illustrazioni* dei concetti e delle proprietà, sia di tipo numerico che di tipo geometrico. L' insegnamento dell' algebra, infatti, acquisisce significato agli occhi degli studenti solo se si evidenzia dove e come ci si può servire dell' algebra, per affrontare situazioni problematiche, ricorrendo ad una ampia attività di *modellizzazione*. Ma questo percorso non è possibile se già al livello dei numeri una parte degli studenti opera quella manipolazione senza significato di cui parlavamo per le lettere. Non è infatti pensabile che i numeri possano costituire il contesto in cui operare quel vero e proprio *salto di astrazione* che è rappresentato dall' introduzione delle lettere nel calcolo. Nel primo anno, quindi, senza dare niente per scontato, si deve cominciare a lavorare da quelle attività sui numeri che possono consentire la riorganizzazione, il consolidamento e l' ampliamento delle conoscenze e delle competenze numeriche acquisite nella scuola di base, attraverso lo studio degli insiemi numerici e il confronto delle loro proprietà. Attività che richiedono un tempo adeguato e che non possono essere sbrigativamente licenziate in poche lezioni iniziali.

Le prime attività sugli insiemi numerici devono permettere di consolidare e sviluppare le competenze nell' ambito del calcolo mentale, nella rappresentazione (decimale, frazionaria, esponenziale) dei numeri, nell' uso critico degli strumenti di calcolo, nel ricorso al calcolo approssimato. Spunti interessanti ci sembrano essere offerti, in questo ambito, dal libro di testo di Emma Castelnuovo[3] che sviluppa gli argomenti numerici a partire dallo studio della calcolatrice tascabile (che potrebbe essere sostituita o affiancata da altri strumenti di calcolo: foglio elettronico, ecc.).

È proprio nell' ambito numerico che possono essere analizzati alcuni algoritmi fondamentali, cominciando dalle espressioni di calcolo (con l' uso delle parentesi), per giungere successivamente al riesame di alcuni

[3] E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi e D. Valenti, *Matematica oggi*, Zanichelli (1992).

algoritmi aritmetici già noti, di cui si acquisisce consapevolezza (divisione con resto dei numeri interi, fattorizzazione in numeri primi, ecc.).

L' attenzione al *senso* nella introduzione dell' algebra suggerisce di rinunciare a far precedere lo studio delle equazioni dall' acquisizione sistematica delle competenze nel calcolo letterale, come avviene nell' insegnamento tradizionale. Occorre invece introdurre le nozioni essenziali di calcolo algebrico (i polinomi e le operazioni dirette su di essi con le più semplici scomposizioni) per poter affrontare in modo soddisfacente le equazioni di primo grado (e con esse i sistemi e le disequazioni, limitatamente a quelle *intere*), che rappresentano il terreno su cui il calcolo acquisisce significato, nella modellizzazione e nella risoluzione dei problemi.

Lo studio delle equazioni di primo grado (e dei sistemi di equazioni e delle disequazioni in una e due incognite…) deve inoltre essere accompagnato dall' introduzione del piano cartesiano che costituisce, oltretutto, un appoggio intuitivo molto efficace.

Nel secondo anno lo studio degli insiemi numerici deve essere completata con una introduzione dei numeri reali. Una definizione rigorosa dei numeri reali appare, a questo livello del percorso di apprendimento matematico, improponibile e quindi occorre privilegiare un approccio intuitivo, di tipo geometrico, fondato sulla misura e sulla rappresentazione dei numeri sulla retta, a partire dalla questione della commensurabilità e della incommensurabilità. Una attenzione particolare deve essere prestata alla rappresentazione decimale dei numeri reali e al calcolo approssimato, in continuità con quanto fatto sui numeri razionali. In questo ambito, si può sviluppare lo studio delle radici quadrate (anche come algoritmo di calcolo approssimato) e, più in generale, delle potenze ad esponente razionale, evitando di attardarsi nello studio di situazioni artificiose e inutilmente complicate, di cui è saturo il tradizionale lavoro sui radicali in seconda.

A conclusione dello studio delle equazioni di secondo grado, sarà opportuno riprendere in esame gli insiemi numerici per vedere come l' esigenza di risolvere le equazioni renda necessari i successivi ampliamenti numerici. Definiti i contenuti dell' insegnamento matematico nel Biennio, può essere utile considerare che cosa resta fuori, rispetto alle pratiche più diffuse: le questioni relative alla divisibilità e alla fattorizzazione dei polinomi, le frazioni algebriche, le equazioni fratte. Si tratta di argomenti che impegnano a lungo, soprattutto nel primo anno (per il secondo, il ridimensionamento del lavoro sui radicali apre, da solo, spazi importanti), che potranno essere utilmente sviluppati negli anni successivi. Negli indirizzi scientifici si potranno anche anticipare, se il tempo lo consente, alcuni di questi argomenti, ma sempre nella successione che abbiamo proposto, che ci sembra quella che meglio garantisce dal rischio di sviluppare i contenuti di questo nucleo, nella logica organizzativa della disciplina, e non secondo quella dell' apprendimento.

Spazio, figure e trasformazioni

Un curricolo di matematica per il Biennio della scuola superiore deve partire da una significativa rivalutazione del ruolo della geometria. Essa infatti, per le sue relazioni e connessioni con gli altri nuclei tematici, rappresenta il terreno più fertile di costruzione di *immagini* dei principali concetti matematici (si pensi alla retta numerica, alle interpretazioni geometriche delle operazioni algebriche, alla rappresentazione grafica di dati e funzioni).

Essa inoltre costituisce uno dei terreni privilegiati, anche dal punto di vista metodologico, per cogliere i legami tra la matematica e le scienze (*geometria come prima rappresentazione del mondo fisico*…). Anche in questo ambito si devono, allo stesso tempo, consolidare e organizzare le conoscenze e le competenze geometriche già acquisite nei cicli scolastici precedenti, e ampliarle in modo progressivo. Uno studio sistematico della geometria euclidea come teoria ipotetico-deduttiva appare, a questo stadio, improponibile. Le questioni che stanno alla base dell' edificio teorico della geometria euclidea appaiono " elementari" solo da un punto di vista " interno" all' edificio della teoria, ma sono le più difficili dal punto di vista concettuale (si pensi alla distinzione tra assiomi e teoremi, o alla individuazione degli elementi primitivi). Uno studio sistematico della geometria euclidea impone inoltre, nella fase iniziale, una ampia attività di tipo definitorio, della quale gli studenti non possono percepire l' importanza, e che finisce spesso per annoiarli e scoraggiarli. In questo tipo di insegnamento, è inoltre necessario un ricorso alla dimostrazione in questioni iniziali che appaiono, agli occhi degli studenti come evidenti, e che rischiano di far percepire il procedimento dimostrativo come una tecnica astrusa e poco ragionevole. Quello che occorre ipotizzare è quindi un approccio allo studio della geometria che conduca alla scoperta delle proprietà, e che, partendo dalla descrizione (delle figure, delle costruzioni) sviluppi, attraverso la necessità di spiegare, le condizioni che, ad un livello successivo del percorso proposto, rendono necessario il passaggio alla *definizione* rigorosa dei concetti e alla *dimostrazione* delle proprietà. Ad una presentazione sistematica della geometria come catena di assiomi e teoremi, è preferibile quindi l' esplorazione di alcune *isole deduttive*, cioè di quegli insiemi di risultati che si possono dedurre a partire da una o più proprietà significative precedentemente esplorate e riconosciute. Il passaggio alla *dimostrazione*, che costituisce una acquisizione nuova e necessaria dell' insegnamento del Biennio, deve essere preparata e costruita in modo progressivo, e quindi concepita come il punto di arrivo, non quello di partenza, del processo di apprendimento. In ambito geometrico si possono individuare tre nuclei tematici:

– la geometria delle figure;
– la geometria delle trasformazioni;
– la geometria delle coordinate.

Questi nuclei sono fortemente interconnessi tra loro, e integrati con gli altri temi di matematica. Per rompere una consolidata abitudine della scuola italiana, a limitare lo studio della geometria alle figure e alle trasformazioni nel piano, ci sembra utile una significativa integrazione tra geometria piana e geometria solida, che deve essere opportunamente progettata, per evitare solo " incursioni" improvvisate ed episodiche nello spazio. Nel primo anno si può quindi partire da uno studio della geometria delle figure (poligoni nel piano, poliedri nello spazio) in relazione alle proprietà invarianti per isometrie (uguaglianza, proprietà angolari), senza un ricorso esplicito alle trasformazioni, ma con una particolare attenzione alle proprietà di simmetria delle figure studiate.

L' introduzione delle coordinate e lo studio delle rette nel piano cartesiano, costituiscono uno strumento indispensabile per lo studio di equazioni, disequazioni e sistemi lineari.

Nel secondo anno, lo studio dell' equiestensione per i poligoni, il teorema di Pitagora e le sue conseguenze, possono costituire, tra l' altro, il punto di partenza per quella introduzione intuitiva dei numeri reali, di cui abbiamo già parlato.

Lo studio delle trasformazioni geometriche non deve avere un carattere sistematico e formalizzato ma, partendo da alcune trasformazioni fondamentali (simmetrie, traslazioni, rotazioni) diventare anche l' occasione per ripensare, e magari dimostrare, qualche proprietà delle figure indagata precedentemente.

Lo studio del piano cartesiano prosegue con la rappresentazione grafica di alcune semplici funzioni (v. Relazioni e funzioni).

Anche in ambito geometrico è forse utile sottolineare ciò che resta fuori, rispetto all' insegnamento attuale nel biennio (o meglio, nel caso della geometria, a ciò che l' insegnamento attuale dovrebbe essere): circonferenza e cerchio, omotetie e similitudini. Anche questi argomenti, insieme allo studio delle trasformazioni nello spazio e dell' equivalenza delle figure solide, potrà essere sviluppata negli anni successivi, salvo le eventuali anticipazioni possibili negli indirizzi scientifici.

Dati e previsioni

Costituisce uno dei temi più importanti ai fini della formazione del cittadino. Le informazioni di tipo statistico sono infatti diventate uno dei principali strumenti con i quali si argomentano le scelte in campo economico e politico, così come le valutazioni di tipo probabilistico che intervengono in questioni rilevanti (valutazione del rischio, attendibilità dei test diagnostici, ecc.). La capacità di interpretare correttamente questi dati, e soprattutto di interpretarli in modo critico, sfuggendo all' uso intenzionalmente distorto che spesso se ne fa, costituisce una delle competenze fondamentali per esercitare in modo consapevole i propri diritti di cittadinanza. Ma questo è un nucleo su cui non bisogna tagliare, ma solo aggiungere. Si tratta infatti del tema che nella scuola viene trascurato, per non dire rimosso.

Nel primo anno, si può lavorare intorno ai concetti elementari della statistica descrittiva, attraverso la progettazione e l' esecuzione di una inchiesta statistica. Nel secondo anno, per quanto riguarda la probabilità, si dovrebbero esaminare le principali definizioni (valutazioni) di probabilità e studiare le più semplici proprietà della probabilità, lasciando il teorema di Bayes e lo studio delle principali distribuzioni di probabilità, agli anni successivi.

Relazioni e funzioni

Lo studio delle relazioni non deve costituire, in generale, un argomento aggiuntivo, ma deve rappresentare un elemento trasversale ai diversi nuclei dell' insegnamento matematico del biennio. Nell' esplorazione di problemi e nella scoperta delle proprietà, sia in ambito numerico che geometrico, occorre imparare a riconoscere relazioni significative tra oggetti e grandezze, e ad utilizzarle nello studio dei problemi e nella rappresentazione dei dati e delle informazioni. Non si tratta quindi di proporre uno sviluppo in astratto delle relazioni (che insieme alle tavole di verità dei connettivi logici, costituirebbero, secondo molti libri di testo gli ingredienti per ragionare correttamente!), ma, al contrario, di esaminare le proprietà di tutte quelle relazioni d' ordine e di equivalenza che si incontrano in matematica, cogliendone analogie e differenze. Solo dopo che si è costruito un ricco repertorio di relazioni sarà utile uno studio più generale, che potrà essere svolto negli anni successivi (o forse già alla fine del biennio negli indirizzi scientifici).
Considerazioni analoghe valgono per il concetto di funzione, che è certamente una delle idee chiave di tutta la matematica, e che riveste un ruolo decisivo in tutte le scienze.
Il lungo e tormentato processo storico che ha consentito di metterlo a fuoco dovrebbe, da solo, suggerire una certa cautela nella sua costruzione. Il Biennio non è quindi il momento per una sua definizione formalizzata (come sottoinsieme del prodotto cartesiano…) ma, appunto, per la sua corretta costruzione. Lo studio delle funzioni deve partire dall' analisi di alcune leggi già note che legano le grandezze geometriche o fisiche (i diversi tipi di proporzionalità, linearità,…) per poi proseguire con la loro rappresentazione grafica, e quindi arrivare ad una prima definizione di funzione (" alla Dirichlet"). Il concetto di funzione, come quello

di relazione, ha un forte potere organizzativo delle conoscenze già acquisite e come tale può essere utilizzato.

La seguente tabella sintetizza le scelte che abbiamo ipotizzato, strutturate secondo un possibile itinerario di lavoro, nell' ambito del quale mettere a fuoco con maggiore dettaglio le attività da proporre, organizzate in percorsi didattici.

Primo Anno	*Secondo Anno*
GLI INSIEMI NUMERICI (Numeri naturali, interi e razionali; rappresentazioni dei numeri; calcolo approssimato; algoritmi numerici) LA GEOMETRIA DELLE FIGURE 1 (Poligoni e poliedri: uguaglianza, proprietà angolari, elementi di simmetria) INTRODUZIONE ALL' ALGEBRA (Polinomi e operazioni dirette su di essi) IL METODO DELLE COORDINATE (Rette ed equazioni) MODELLI ED EQUAZIONI (Equazioni, disequazioni e sistemi lineari) UNA INCHIESTA STATISTICA (Rappresentazione dei dati; valori di sintesi e dispersione)	LA GEOMETRIA DELLE FIGURE 2 (Poligoni equiscomponibili; teorema di Pitagora; area dei poligoni e superficie dei poliedri) MISURA E NUMERI (Grandezze, misura, numeri reali; radici e potenze) LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE (Simmetrie, traslazioni, rotazioni, isometrie) DALLE LEGGI MATEMATICHE ALLE FUNZIONI (Funzioni e grafici) EQUAZIONI DI SECONDO GRADO INTRODUZIONE ALLA PROBABILITÀ