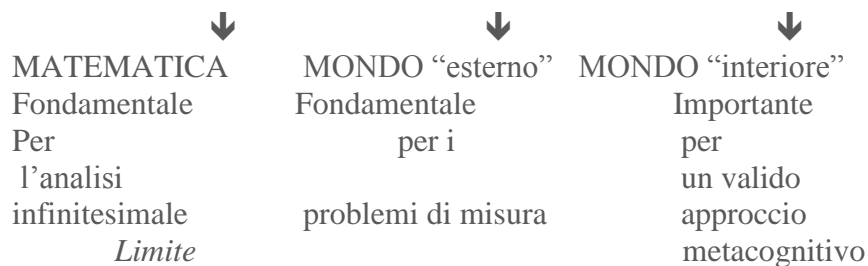


Questioni didattiche sull'approssimazione in matematica

Lucia Grugnetti, Gruppo zeroallazero
Parma - gennaio 2005



Approssimazione: quando?

- Riteniamo che la matematica «elementare» sia ricchissima di occasioni per familiarizzare gradualmente **con il concetto di limite** e che la scuola dell’obbligo possa svolgere un ruolo fondamentale nello sviluppo di immagini mentali favorevoli al suo apprendimento.
- I temi che ci sembrano più ricchi di spunti, anche per il loro carattere verticale che consente di riprenderli più volte e da diversi punti di vista nei vari livelli scolastici, sono quelli della misura, delle successioni e **dell’approssimazione**.

Approssimazione: Come?

•Misurare aree e lunghezze

- I problemi legati alla misura (di lunghezze, di aree, di volumi) sono presenti nei programmi in tutti i livelli scolastici.
- Solitamente però, con qualche eccezione nella scuola elementare, essi si riducono al calcolo di perimetri, di aree o di volumi di figure particolari (poligoni, cerchio, poliedri, solidi di rotazione) attraverso formule specifiche
- Questa impostazione alimenta negli allievi la convinzione che «ogni problema matematico si risolve con una formula o un algoritmo particolare» e che non sia del tutto lecito, in matematica, utilizzare metodi di approssimazione

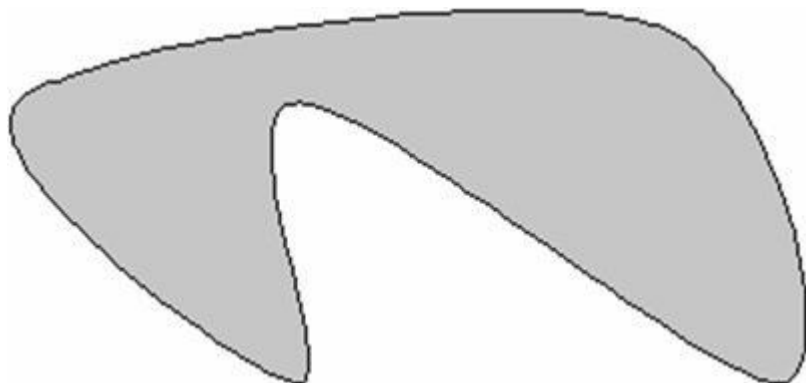
L'area di un laghetto

(Oltre ogni limite...percorsi didattici per insegnanti spericolati, in stampa)

• Immagina di vedere dall'alto un laghetto di montagna e di disegnarlo ottenendo la figura qui a fianco

• L'area della figura grigia si può misurare?

• Se sì, come? Se no, perché?



Obiettivi dell'attività

- collegare l'esistenza della misura dell'area alla forma della figura più che all'esistenza di formule per calcolarla;
- attivare la ricerca di strategie di misura che non si possono basare sull'applicazione di formule;
- destabilizzare la certezza di poter sempre determinare esattamente il risultato di un problema;
- assumere la consapevolezza che il risultato ottenuto è necessariamente approssimato;
- capire che è possibile scegliere fra più metodi di approssimazione o applicare uno stesso metodo con successivi raffinamenti, rendendosi conto di ottenere risultati con diversi gradi di precisione;
- intuire che, per esempio attraverso quadrettature sempre più fini, si può -almeno teoricamente- avvicinarsi sempre di più al valore esatto della misura dell'area.
- L'attività può essere proposta individualmente o in piccoli gruppi. Gli allievi devono disporre di strumenti da disegno (carta, matita, riga o squadra).
- L'attività è stata proposta in 15 classi con allievi dai 9 ai 16 anni,

Le motivazioni del "no"

- Secondo gli allievi non si può misurare l'area perché:
 - N1 *la figura è curva, è irregolare, non è regolare...* (argomentazione esclusivamente qualitativa)
 - N2 *la figura non ha lati che si possano misurare...* (argomentazione con introduzione di aspetti quantitativi)
 - N3 *la figura non è un poligono, non è un cerchio...* (impossibilità di ricondursi a figure note)
 - N4 *non ci sono formule per calcolare l'area...* (mancanza di formule specifiche)
 - N5 *altro* (nessuna motivazione o risposte di altra natura)

I “no” alla seconda domanda

Se sì, come? Se no, perché?

•(N1) Anna scrive: *[L’area non si può misurare perché la figura] ha delle onde*; Martina: *[L’area non si può misurare perché la figura] è curvosa*.

Le motivazioni del “sì”

•Le motivazioni del «sì» sono state classificate in rapporto al grado di applicabilità della strategia di misura proposta.

•Secondo alcuni alunni, *l’area si può misurare ma...*

–S1 *non so come, non ho gli strumenti necessari...*

–S2 *non ci sono formule...*

•Altri allievi affermano che l’area si può misurare e indicano anche un metodo per eseguire tale misura:

–S3 *trasformare la figura in un poligono con la stessa area...*

–S4 *decomporre la figura in poligoni o quadrettarla...*

–S5 *altre strategie*

Risposte corrette, ma...

•Le risposte corrette fanno riferimento a decomposizioni in poligoni o a quadrettature.

•Tuttavia pochi allievi ammettono esplicitamente che il metodo seguito produce un risultato approssimato.

•E anche quelli che lo fanno, sembrano attribuire all’approssimazione una **connotazione negativa**, testimoniata dall’utilizzo del termine *approssimativo*, al posto di *approssimato*.

•Leonardo (III sup) : *Forse sì. Tratteggiandola a maglia di ferro con dei quadratini piccoli forse di può avere un’idea approssimativa.*

•**L’idea dinamica di iterazione e di avvicinamento sempre migliore non è presente in alcuna risposta.**

C’è anche un piccolo Archimede

•Christopher, un allievo di 14 anni, propone un metodo «fisico»:

•*Secondo me sì, [si può misurare l’area] ritagliando la figura e pesandola; dopo aver ottenuto il peso (la massa), la densità e in seguito il volume. E poi si deve calcolare l’area.*

E su scala internazionale?

•Dal progetto PISA

•Scopo del progetto PISA è quello di misurare le conoscenze degli allievi (di 15 anni) e la loro capacità di riflettere su tali conoscenze e sulle loro esperienze, nonché sulle loro capacità di applicarle e questioni e situazioni del mondo reale (OCDE, 2001).

•**Stimate l’area dell’Antartide utilizzando la scala della cartina.**

•**Esplicitate il vostro lavoro e spiegate come avete fatto tale stima (Potete disegnare sulla cartina se ciò può esservi di aiuto).**

Vous voyez ci-dessous une carte de l'Antarctique.



Ad esempio, in Svizzera

(Guignard, Tièche Christinat, in press)

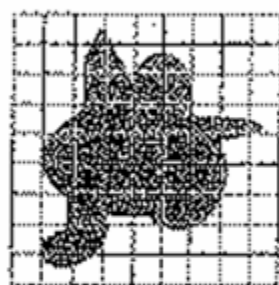
- Il tasso di riuscita (risposta corretta: area compresa tra 12'000'000 et 18'000'000 km²) in Svizzera è del 21% con una variazione da 11 a 28% a seconda dei cantoni.
 - I metodi più utilizzati consistono nel calcolare l'area di un rettangolo o aggiungere l'area di varie figure geometriche regolari.
 - *Solo pochissimi allievi hanno pensato a calcolare l'area di un cerchio.*
- Calcolo esatto "contro" calcolo approssimato (Kahane, 2002)*
- «Nella cultura, questi due tipi di calcolo sono sovente presentati in opposizione,
 - dove il calcolo approssimato appare come quello al quale il matematico si rivolge quando il calcolo esatto diventa insostenibile.
 - La realtà è ben più complessa, benché vi sia in questa visione una parte di verità.
 - Nella risoluzione di numerosi problemi nei quali sono utilizzati dei calcoli, la ricerca di soluzioni esatte non è né pertinente, né utile.
 - Inoltre, anche quando il calcolo esatto è possibile, non è necessariamente facilmente utilizzabile.
 - L'insegnamento non sfugge a tale visione culturale e, tradizionalmente, la parte accordata al calcolo approssimato è ridotta. I rapporti tra calcolo esatto e calcolo approssimato non sono visti nella loro complementarità, ma in una opposizione gerarchica di valori, essendo il calcolo esatto quello nobile.»

Accettare un risultato approssimato

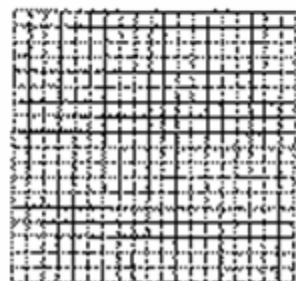
• **Attività 1.**

• **Che bella figura!**

• Mario e Giovanna devono trovare l'area di questa figura:



Mario propone di misurare la superficie con carta a quadretti di questo tipo:



• Giovanna con carta a quadretti di questo tipo:

• **E tu che cosa faresti? Hai altre proposte?**

• **Quanto misura secondo te la superficie della figura? Spiega come l'hai trovata.**

Obiettivi attività 1

1. attivare la ricerca di strategie risolutive che non si possono basare sull'applicazione di formule;
2. destabilizzare la certezza di poter sempre determinare esattamente il risultato di un problema;
3. assumere la consapevolezza che il risultato ottenuto operativamente è necessariamente approssimato;
4. capire che è possibile scegliere fra più metodi di approssimazione o applicare uno stesso metodo con successivi raffinamenti, rendendosi conto di ottenere risultati con diversi gradi di precisione.

Attività 2

•2. Centrare il bersaglio

- 1. Agli allievi viene consegnato un foglio A4, sul quale segnano il loro numero d'ordine nell'elenco alfabetico.
 - 2. L'insegnante, alla presenza degli studenti, segna sul proprio foglio un punto in una posizione a suo piacimento ed afferma (eventualmente prospettando un premio) che vince questo gioco chi, tra loro, saprà rappresentare sul proprio foglio un punto in una posizione identica alla sua.
 - 3. Gli allievi disegnano il loro punto e il docente su un foglio di carta velina (o forando il foglio in corrispondenza) rappresenta la nuvola di punti prodotti dai diversi allievi, numerandoli per poter riconoscere la posizione relativa a ciascuno di essi.
 - 4. Nessuno (si spera!) vince.
 - 5. L'insegnante dopo aver annunciato il risultato «negativo»,
invita gli studenti
- 6. a stabilire delle nuove regole del gioco,
–per esempio, decidendo una distanza al di sotto della quale considerare "più vincitori" alcuni punti rispetto ad altri.
–questa scelta avviene «al buio» senza che gli allievi vedano quanto è caduto lontano il proprio punto. In tal modo, gli allievi sono condotti a prendere in considerazione distanze diverse e classificare i punti in gruppi a seconda della loro vicinanza al bersaglio, così da avere una specie di graduatoria che nel disegno troverà la sua rappresentazione in differenti circonferenze concentriche (come nei veri bersagli).
- 7. L'insegnante mostra chiaramente a ciascun allievo dove ha collocato il punto rispetto al bersaglio.
 - 8. Utilizzando questa informazione gli studenti sono invitati a fare un secondo e poi un terzo tentativo; questo li porterà ad avvicinarsi maggiormente al bersaglio e indurrà (su eventuale invito dell'insegnante) la necessità di restringere ulteriormente il "livello di accettabilità",

Ci pensiamo!

- Dopo una discussione finale, si richiede agli allievi di rispondere per iscritto (a casa) ad una domanda del tipo:
 - «Alla luce dell'attività svolta, perché si può accettare un risultato non esatto? Quando?»
- Gli obiettivi sono ancora quelli dell'attività 1.
con peso preponderante su:
 - spostare l'attenzione dalla ricerca di un risultato esatto a quella di un risultato accettabile, in base alla qualità dell'approssimazione operata.

L'attività è stata proposta in 7 classi, dalla III media alla IV superiore

- Due tipologie di risposte:
 - connotazione negativa e imprecisa attribuita all'approssimazione: *Secondo me si può accettare un risultato non esatto perché come in questo caso nessuno è stato in grado di centrare il bersaglio, quindi ci si è dovuti accontentare* (I liceo scientifico)
 - connotazione positiva: consapevolezza del fatto che si tratti, rispetto ai problemi più usuali che ammettono sempre un (unico) risultato, di un diverso modo di ragionare, comunque accettabile: *Si può*

accettare perché, entro certi limiti, si può avere una "tolleranza" ovvero un margine che però può fare considerare l'attività riuscita (I liceo scientifico).

Attività 3

•Quadrettare un rettangolo

–Preparare dei fogli bianchi di forma rettangolare di misura 18 x 12 centimetri, e 3 ceste contenenti tanti foglietti quadrati rispettivamente di lato 7 cm, di lato 5 cm e di lato 6 cm. I quadrati sono di colore diverso: verde quelli di lato 7 cm, blu quelli di lato 5 cm, rosso quelli di lato 6 cm. Tutte le misure devono restare ignote agli allievi.

–Consegnare un foglio rettangolare ad ogni studente, chiedendo di non usare righelli o altri strumenti di misura.

–Mostrare da lontano un foglietto di forma quadrata, scelto dalla prima cesta (quindi di lato 7 cm).

–Porre a ciascun allievo la seguente domanda: «Quanti quadrati vuoi per ricoprire al meglio il rettangolo? Tieni presente che vince chi si avvicina di più».

–Annotare le richieste, le discussioni, le contestazioni, le osservazioni degli allievi che, da parte loro, devono scrivere quello che stanno facendo e quali sono le loro conclusioni.

–Ripetere per il quadrato di lato 5 cm.

•Solo su richiesta degli allievi mostrare il quadrato di lato 6 cm.

Perché un lavoro di quadrettatura: analisi a priori

•Lavorare in modo pratico sulla quadrettatura di un rettangolo può, a certi livelli di analisi e discussione successivi, mettere in luce questioni molto sottili e profondamente diverse quali:

• l'*esistenza* dell'area e la sua *determinazione*, eventualmente approssimata.

•Si tratta di far riflettere sulla dicotomia tra teoria e prassi

• quando ci si riferisce ad un problema calato nella realtà non ci si può esimere dal cercarne e determinarne una soluzione attraverso un processo di misura; lo stesso problema trattato in modo puramente teorico può spingerci a valutare solamente l'esistenza o meno della soluzione, indipendentemente dalla sua effettiva determinazione.

Il senso di questo tipo di attività

•È quello di destabilizzare l'idea negativa del concetto di approssimazione, spesso molto diffusa e dare, invece, un senso positivo ad un'approssimazione migliorabile ad oltranza

• (infinito in potenza) che permette di

•arrivare al concetto di limite (infinito in atto).

Con i diversi tipi di quadrato

•Con i quadrati di lato 7 cm o 5 cm, si ottiene sempre una misura per eccesso o per difetto, a seconda del numero di quadrati usati ed è possibile per gli studenti confrontare le due situazioni e stimare le eventuali differenze nei risultati.

• La scelta di non dare subito il quadrato di lato 6 è dettata appunto dall'intenzione di controllare se nasce spontaneamente la richiesta di un quadrato più adatto: il quadrato di lato 6 è, tra tutti, il quadrato *buono* ed è l'eccezione, perché è l'unico che dà una misura *esatta*.

Per i più grandi...foglio A4!

•*Quadratura foglio A4 – Esiste una soluzione?*

•L'attività è stata proposta in 3 classi: seconda e terza liceo socio-psico-pedagogico, prima liceo linguistico.

•alcuni hanno arrotondato le misure del foglio per forzare l'esistenza di almeno una soluzione; altri non sono riusciti a concludere il lavoro

•di questi una parte non ha fornito vere spiegazioni sulla propria rinuncia,

•un'altra parte ha pensato che un modo *deve* esserci, anche se ha provato tante volte e ha trovato sempre un «resto»;

•una esigua minoranza ha sostenuto l'impossibilità di trovare una soluzione perché i lati non sono *compatibili* o più esplicitamente perché *non esiste un numero razionale comune ad entrambi i lati*.

La crisi del foglio A4!

•Con il foglio di tipo A4 gli studenti hanno dovuto abbandonare la certezza che esista sempre il quadrato *buono!*

•Si apre la strada ai numeri irrazionali a partire da un problema concreto.

•*I dettagli storici si trovano in un articolo di Alessandro Zaccagnini dal titolo "Formato A4: aritmetica e geometria con un foglio di carta (L'educazione Matematica, n. 1 2003)*

Commento

•Queste attività cercano di contribuire in modo *costruttivo* all'introduzione dei concetti di infinito e di limite, favorendo l'accettazione dell'approssimazione

•come carattere distintivo della matematica

•e non come un difetto, un incidente che capita quando qualcosa non ha funzionato a dovere.

•L'accordo per il quale *vince non chi arriva al risultato giusto, ma chi si avvicina di più* dà la possibilità agli studenti

•di migliorare il risultato, di fare dei *rilanci* e

•**vedere l'approssimazione stessa nella sua valenza positiva, come una risorsa, di cui è possibile controllare positivamente la stima dell'errore commesso.**

Una primizia: giochiamo con Platone

accompagnati da Achille Maffini

•**“Il Menone”, dai più piccoli ai più grandi**

•Il progetto di ricerca in oggetto, in un'ottica di attività “in verticale” che prende l'avvio dalla scuola elementare per arrivare alla scuola secondaria di secondo grado, si propone di operare su vari piani.

–1) introdurre precocemente il tema dell'approssimazione,

–2) sviluppare le percezioni delle limitazioni (nel senso di vincoli - anche pratici - come possono essere gli strumenti di misura che si hanno a disposizione in quel momento) del contesto nel quale ci si muove in quel dato livello scolastico,

–3) studiare l'evoluzione che gli strumenti (pratici e teorici) a disposizione in un contesto più “ricco di contenuti” possono apportare nella costruzione di nuove conoscenze.

Dai più piccoli ai più grandi: si parte tutti insieme

• Hai un quadrato. Riusciresti a costruirne uno avente area doppia? Riesci a trovarne la misura del lato (nota la misura del lato del quadrato di partenza)?

Analisi dell'attività

• Nello **sviluppo verticale**, l'attività permette:

- la costruzione di quadrati mediante manipolazione e determinazione di informazioni da essi
- costruzioni di successioni approssimanti la misura di un segmento
- la congettura di impossibilità e dimostrazione di impossibilità di avere una risposta in termini di numeri razionali del problema
- il passaggio dai numeri razionali ai numeri reali come ambito in cui trovare la soluzione sul piano teorico del problema (dal potenziale all'attuale)
- il ritorno al numero razionale come ambito di risposta (in termini di realtà) al problema; ruolo dell'approssimazione.

Con le parole di Achille Maffini

• *Credo che sull'idea del soggetto che fa scelte razionali si possa produttivamente lavorare, soprattutto nell'ambito della approssimazione. In questo caso l'alunno diventa protagonista e responsabile delle proprie scelte, e questo dovrebbe favorire un maggior coinvolgimento.*

• *Secondo questa prospettiva, le problematiche legate all'approssimazioni diventerebbero non solo un modo per preparare la lunga strada verso il concetto di limite, ma anche un approccio metacognitivo al coinvolgimento responsabile del soggetto nel suo processo di apprendimento, per indurre soprattutto la convinzione che questo processo è frutto delle scelte del singolo e non dell'insegnante (il quale invece si configura solo come colui che favorisce l'acquisizione degli strumenti necessari a tale processo).*

• *La capacità di fare scelte responsabili (nel caso specifico il grado di approssimazione di una misura) diventa quindi capacità di gestione di una informazione significativa, base sostanziale di qualunque conoscenza.*

Dove si può arrivare?

• ...il gruppo zeroallazero

• Vi terrà al corrente

• *Arrivederci*

Bibliografia

• Andriani M. F., Dallanoce S., Falcade R., Foglia S., Gregori S., Grugnetti L., Maffini, A., Marchini C., Rizza A., and Vannucci V. (in press), *Oltre ogni limite: percorsi didattici per insegnanti spericolati*, Pitagora Editrice, Bologna.

• Kahane, J-P. (a cura di): 2002, *Enseignement des sciences mathématiques*, (Rapport au ministre de L'Education nationale), Editions Odile Jacob, Paris.

• Zaccagnini, A.: 2003, 'Formato A4: aritmetica e geometria con un foglio di carta', *L'educazione Matematica*, n. 1 2003, 47-54.