Metacognizione e insegnamento della Matematica

Brunetto Piochi, 2007

La pessima fama di una disciplina

È un fatto innegabile e assai noto che la matematica goda di una pessima "fama" e che sia odiata da studenti e adulti, non soltanto in Italia. Se si deve cercare un responsabile di ciò, probabilmente l'aritmetica e la sua "parente" più stretta, l'algebra, si prestano assai bene a ricoprire tale ruolo; se non tali aree in se stesse, quantomeno il modo in cui i temi che vi fanno riferimento vengono presentati e appresi. La rilevanza riconosciuta all'aritmetica, addirittura la sua identificazione con la matematica di base, sono testimoniate da diversi fatti: ad esempio, ricordiamo che per vari decenni lo scopo della scuola elementare è stato quello di insegnare a "leggere, scrivere e far di conto"[1]: superato il primo ciclo della scuola elementare, lo scopo primario dell'insegnamento della matematica sembrava diventare (a parte l'apprendimento di alcune formule geometriche) l'addestramento a compiere calcoli con la maggiore velocità ed esattezza possibile.

Un particolare non di poco conto è che, quando i calcoli diventano eccessivamente complessi e sofisticati (cosa che regolarmente avviene al crescere del livello scolastico, fino ad arrivare alle espressioni con i radicali o alle scomposizioni di polinomi della scuola secondaria…), il *controllo* del risultato sfugge allo studente, il quale pertanto elabora una propria forma di impotenza, scoraggiamento e disistima, probabilmente tipica del rapporto con la matematica. Il fatto poi che il risultato corretto di un calcolo sia indubbiamente unico, porta ad oggettivare tale atteggiamento e ad estenderlo a considerazioni generali sulla propria intelligenza e personalità.

D'atro canto in una società come la nostra, il ruolo dell'educazione matematica va ben oltre (è cosa ben diversa da) l'apprendimento di formule. Gli stessi documenti ufficiali ministeriali sottolineano questo ruolo più vasto, al tempo stesso tecnologico e formativo, della disciplina. D'altro canto, come si esprimono ad esempio i Programmi di Matematica della Spagna (relativi al livello del "Bachillerato"), "partecipare alla conoscenza matematica consiste, più che nel possesso dei risultati finali di questa scienza, nel *dominio della sua forma di fare*[2] […] Sicuramente la matematica deve contribuire a obiettivi educativi generali, vincolati allo sviluppo di capacità cognitive. Senza dubbio e unitamente a ciò occorre sottolineare anche il valore funzionale che possiede, come insieme di procedimenti per risolvere i problemi in campi molto diversi, per porre in rilievo aspetti e relazioni della realtà non direttamente osservabili e per permettere di anticipare e prevedere fatti, situazioni o risultati. Entrambi gli aspetti, il funzionale ed il formativo, sono inscindibili e complementari."

L'acquisizione delle competenze matematiche, l'apprendimento di questa "forma di fare" per potersi avvalere appieno delle potenzialità della matematica, è un processo lento, laborioso, alla cui base deve esserci una prolungata attività su elementi concreti, esaminati, discussi, rappresentati in forme adeguate al livello di maturazione e conoscenza di ciascuno. Non è questa la sede per addentrarsi in una descrizione della "forma di fare" della matematica ma certamente essa ha delle basi dal contenuto metacognitivo forte: non si può "fare" matematica se non si riesce a esaminare i problemi all'alto, da diversi punti di vista, se non si è in grado di incrociarli con altre situazioni, di confrontare le loro soluzioni con altre soluzioni o altri problemi all'apparenza distanti, ma in cui si può trovare una somiglianza strutturale…

Proprio per questo una educazione di tipo metacognitivo in matematica non è più un *optional* o un "pallino" di irriducibili idealisti, ma uno strumento indispensabile per un insegnamento efficace e completo della disciplina. Vale infine la pena di osservare in questa sede come un discorso analogo sia comunque opportuno per tutte le discipline

---

[1] A questa formula in italiano, fa eco la corrispondente formula inglese che parla con un gioco di allitterazioni della "scuola delle 3 R": Reading, wRiting and aRithmetics. Vogliamo anche ricordare che per molti studenti le ore (ed i testi) di Matematica si dividono in ore di Geometria ed ore di… Matematica, indicando appunto con quest'ultimo nome sostanzialmente aritmetica ed algebra.

[2] "*forma de hacer*"; il corsivo è nostro.

scientifiche, alle quali si potranno applicare molte delle considerazioni teoriche che faremo nel seguito. Inizialmente cercheremo di chiarire alcuni punti, parlando di modelli mentali e, correlati a questi, di *misconcetti*. Successivamente indagheremo alcune piste e metodologie di lavoro con particolare riferimento alla matematica.

Modelli mentali nelle Scienze

Seguendo (Mason 1995) o (Cavallini, 1995) considereremo un *modello mentale* come una rappresentazione concettuale di un fenomeno o classe di fenomeni che ne comprende una organizzazione cognitiva strutturata, dunque un insieme integrato di elementi tra loro altamente coesi in grado di interpretare, spiegare, anticipare i comportamenti dei fenomeni studiati. Sono dunque "teorie" in qualche modo complete e coerenti, più precisamente si tratta di:

- " micro-teorie" che gli individui si costruiscono circa aspetti del mondo in cui vivono, siano essi aspetti generali (l'energia, la vita,…) sia specifici (la cellula, il Sole, i calcoli…);
- " teorie ingenue" , in quanto affiorano in modo spontaneo dall' esperienza personale, anche al di fuori e indipendentemente da (anzi, non di rado in contrasto con) la trasmissione culturale delle nozioni,
- " teorie intuitive" , perché si basano prevalentemente sull' apparenza dei fenomeni e su ciò che sembra più ovvio
- " teorie alternative" , in quanto spesso offrono spiegazioni differenti dei fenomeni, rispetto a quelle scientifiche, dei fenomeni.

Ogni volta che dobbiamo comprendere la realtà o compiere anticipazioni, avanzare ipotesi, risolvere problemi, prendere decisioni, ciascuno di noi (spesso inconsciamente) ricorre ai propri modelli mentali della realtà Questi vengono dunque ad assumere l'aspetto di "entità" solide e resistenti, cui facciamo affidamento per spiegarci il mondo e che abbandoniamo o modifichiamo a fatica.

Un valido modello mentale ha infatti la caratteristica di riuscire a " salvare" i fenomeni, aiutandoci a concepirli e interpretarli in un modo che si accorda con le nostre esperienze, con i dati di cui disponiamo e anche con i presupposti che usualmente condividiamo. Dunque le persone sono in genere riluttanti a rinunciare ai propri modelli mentali in favore di altri, anche se questi ultimi vengono presentati come scientificamente più accreditati. Provocatoriamente, chi di noi non è mai caduto nella "trappola" di un indovinello del tipo "*pesa più un chilo di piume o un chilo di piombo?*" oppure chi di noi riesce a sfuggire alla convinzione che, lanciando da una torre una palla di piombo e una di polistirolo di ugual volume, la seconda toccherà terra *dopo* l'altra?

Un esempio che invariabilmente "funziona" anche con uditorio di alto livello culturale consiste nel chiedere ai presenti di indicare con un dito la direzione in cui si trova la capitale di un paese europeo, ad esempio Madrid o Oslo (prima di andare avanti, invitiamo il lettore a fare lo stesso…). Inevitabilmente l'attenzione si concentra sul punto cardinale e il dito si punta nella direzione magari giusta ma… orizzontalmente, *come se la Terra fosse piatta*. A dispetto della nostra istruzione, il "modello mentale" che ci siamo costruiti nella nostra infanzia e che (si badi bene !) funziona perfettamente per guidare la nostra quotidianità, si impone e guida i nostri gesti.

Misconcetti in matematica

Molti interessanti esempi, riguardanti anche la matematica, ci vengono forniti in letteratura. Esiste ormai infatti una letteratura molto vasta che si occupa dei misconcetti cognitivi[3], ma anche di misconcetti e convinzioni riguardanti la metacognizione o l' affettività, relativamente alla matematica. Proprio la vastità della letteratura costringe a restringere il nostro campo. In questa sede ci occupiamo infatti dell' aspetto metacognitivo propriamente detto e dunque occorrerà riferirsi principalmente ai misconcetti che riguardano tale aspetto, limitandoci a brevi cenni sugli altri due, almeno per quanto non strettamente connesso alla nostra tematica.

Un chiaro esempio di *misconcetto cognitivo* è la convinzione, piuttosto diffusa, che un prodotto fra due numeri debba sempre essere maggiore della somma dei due. Se è chiaro come si forma il modello di una terra piatta, come si

[3] Molti esempi riguardanti la matematica si trovano in (D'Amore 1999), dove è anche presente una esposizione teorica a proposito di modelli mentali.

forma invece un simile modello delle operazioni ? In realtà il meccanismo è noto: si tratta di una indebita generalizzazione di una proprietà intuitiva ed evidente dei numeri naturali (quelli che si apprendono per primi, corrispondenti alla cardinalità di insiemi discreti: 0,1,2,3,..): dati due numeri naturali[4] maggiori di 1 è vero che il loro prodotto è maggiore della somma, ma questa proprietà cessa immediatamente di essere vera appena si passa a moltiplicare per numeri decimali minori di 1. Tuttavia, se il modello mentale costruito in prima e seconda elementare è sufficientemente forte e ben interiorizzato, esso sopravvive all'introduzione di ulteriori elementi numerici e resta per così dire " parassita" nella mente dello studente.

Un altro esempio, riferito in (Deri et al., 1983) mette in luce la convinzione che una divisione possa essere effettuata solo laddove il dividendo è maggiore del divisore. L' esempio citato è particolarmente interessante perché riferito anche a studenti di scuola secondaria superiore. Di fronte a un problema del tipo " *15 amici si dividono 5 kg di biscotti. Quanti ne spettano a ciascuno?*" lo studente, anche di scuola superiore, è spinto a eseguire 15:5. " Dunque non si sta parlando necessariamente qui di bambini piccoli, di riflessioni sulla sola scuola elementare […]. Questi modelli intuitivi emergono con notevolissima forza a dispetto dell' età e della cultura" (D' Amore, 1999; p. 132).

A proposito dell' aspetto *affettivo*, ci limitiamo all' avvertenza che non è lecito considerarlo troppo secondario: come è ben noto, infatti esiste una retroazione negativa del tipo " non mi piace" →" non sono motivato" →" non mi impegno" →" non riesco, mi sento inadeguato" → " provo ansia e disagio" →" non mi piace" . Tale catena (qualunque ne sia il punto di avvio) è perfettamente in grado di limitare sensibilmente l' apprendimento della disciplina. Per una serie di considerazioni generali su questo aspetto si rimanda ad (Aschieri et al., 1998); si rinvia invece il lettore alla ricerca (Cattabrini & Di Paola, 1997) per leggere una serie di significative testimonianze di studenti al termine del ciclo di studi del Liceo Scientifico[5].

Ma non si deve credere che gli esempi di pessimo rapporto con questa materia siano tutti per forza da attribuire a precedenti esperienze scolastiche negative. Questo è dimostrato falso da varie ricerche; ne citiamo una (ancora non pubblicata) svoltasi presso un Istituto Comprensivo di Pisa dove è stato chiesto agli alunni di 1^ elementare di rispondere alla domanda "*Come mi sento quando faccio matematica ?*". Ebbene, molti bambini hanno espresso sentimenti di disagio, sia verbalmente che rappresentando la risposta con disegni dai toni cupi. Si va da frasi del tipo "*la matematica per me è una cosa grande come una montagna*" (con un disegno tutto giocato sui toni del blu con poche macchie gialle) a "*la matematica è allegra ma a volte fa un poco impazzire*" (case colorate su uno sfondo scuro) sino alla dichiarazione drammatica: "*ho paura di avere sbagliato e di prendere un brutto voto*" (in 1^ elementare ! il titolo del disegno è "*La paura*" e vi si distingue un mostro blu e verde che sta per impadronirsi di un bambino, su uno sfondo completamente grigio scuro).

Un interessante esempio di misconcetto, molto diffuso, di tipo *metacognitivo* a proposito della matematica ci viene fornito da D' Amore & Sandri (1986) i quali hanno coinvolto studenti di II media in una proposta il cui scopo era la valutazione delle competenze nell' uso del linguaggio quotidiano applicato a questioni matematiche. L' attività, che si svolgeva di pomeriggio ed a cui i ragazzi aderivano su base volontaria (quindi è lecito presumere trattarsi di studenti capaci e motivati), prevedeva di rispondere a quesiti del tipo " *Fa' finta di essere un maestro (o maestra) delle elementari [che vuole] spiegare ai suoi allievi di terza che l' area del rettangolo si trova facendo base per altezza*" . Riportiamo da (D' Amore & Sandri 1986) tre dei protocolli di risposta, poiché si prestano ad interessanti valutazioni:

- *Prima di tutto per iniziare questa figura geometrica si chiama così perché ha tutti gli angoli di 90°, cioè retti. I suoi lati sono 2 a 2 uguali AB e CD e AD e BC. Quindi per trovare l' area si fa base x altezza.*

[4] La precisazione che i due numeri debbano essere maggiori di 1 è ovviamene dovuta, ma appare in qualche modo superflua, dato il carattere "troppo speciale" dei due numeri 0 e 1…

[5] Valga per tutti la seguente: "*Quando penso alla matematica ciò che mi viene in mente è un lucido e inquietante panico, una febbrile e autentica paura; sensazioni queste che ho provato per cinque anni prima di ogni compito e interrogazione".* Come ci si può poi stupire se un altro studente dichiara convinto che *"l'argomento matematica, al di là di tutto, rimane in ogni caso lo spauracchio, l'incubo più terribile del popolo studentesco italiano"*, oppure se l'Italia risulta così in basso nelle classifiche mondiali che si propongono di misurare le competenze in questa disciplina ?

- *Il rettangolo è formato da due triangoli rettangoli. Si chiamano così perché hanno un angolo di 90°. Dividiamo il rettangolo con una diagonale in due parti uguali. Siccome la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, per trovare l'area del rettangolo si fa base per altezza.*
- *L'area del rettangolo si trova facendo base per altezza cioè* [lo studente disegna un rettangolo e pone le lettere A,B,C,D per denominare i vertici]. *Prima disegno il rettangolo poi scrivo le lettere e l'ipotesi e dopo inizio a spiegare la regola cioè l'area di un rettangolo si trova facendo base per altezza, cioè AB per AD.*

Il terzo protocollo è ovviamente ispirato a un contratto didattico (Brousseau, 1980) rigido, che prevede una sequenza standard (disegno, lettere, ipotesi, tesi,…): lo studente però la vive come un "atto di fede" nei confronti dell'insegnante, e significativamente sembra ritenere che per la comprensione e la corretta applicazione della regola basti il rispetto di questa corretta sequenza[6]. Gli altri due protocolli illustrano invece un atteggiamento ben preciso ed assai diffuso, soprattutto nella scuola secondaria di secondo grado: la matematica appare una scienza puramente "tecnico-sintattica", dove le regole e le proprietà vanno imparate a mente senza riguardo per il loro significato o collegamento[7]. Perciò la "spiegazione" della regola si basa un ragionamento sintattico in cui si inanellano (con una sintassi generalmente corretta) proprietà vere anche se prive di senso ai fini di ciò che si desidera mostrare. Il risultato è un discorso che assomiglia in un certo senso alle classiche "figure impossibili": localmente si presenta coerente e ben costruito, ma quando si passa a considerarlo globalmente se ne scorge una insanabile incoerenza.

La ricerca sopra citata (Cattabrini & Di Paola, 1997) riporta a sua volta esempi significativi di analoghi misconcetti analoghi (fatta salva l'età e la maggior consapevolezza degli studenti considerati). Ad es. si considerino le seguenti testimonianze:

- *Per entrare nel linguaggio matematico è obbligatorio mettere da parte la creatività che non serve. La matematica… non lascia il minimo spazio alla fantasia e all'inventiva.*
- *La matematica non è creazione, è qualcosa che si basa su formule ben precise senza le quali non si può arrivare alla soluzione dei quesiti.*
- *La matematica ha un'importanza scientifica molto ridotta perché è soltanto calcolo numerico: non è importante per la formazione umana e può essere facilmente sostituita dal computer.*

Esse mettono ancora in luce un modello di matematica come scienza puramente sintattica e formale, fino alle estreme conseguenze: la sua inutilità, vista come effetto dell'invenzione di macchine capaci di memoria e velocità ed estremamente affidabili proprio sul piano della sintassi, del formalismo e della precisione[8].

Un tale "modello" metacognitivo è chiaramente assurdo, ma può perfino risultare vincente in una scuola in cui le verifiche si riducono molto spesso a una ripetizione di schemi noti o all'applicazione pedissequa di regole standard. Esso però non conduce certo alla padronanza della materia, anzi ne allontana fortemente la conquista e in ultima analisi indebolisce lo studente: ci si allontana di molto dal possesso della "forma di fare" matematica che i Programmi per la scuola secondaria spagnola pongono come obiettivo della conoscenza di questa materia..

Tuttavia, proprio il fatto che tale modello possa risultare vincente allontana la possibilità di una sua messa in crisi autonoma e dovrà diventare oggetto di uno specifico impegno didattico. Infatti un modello mentale "entra in crisi"

---

[6] probabilmente l'autrice o l'autore hanno imparato in questo modo…

[7] Un'enunciazione consapevole e precisa di questo fatto è dovuta a una studentessa quattordicenne di una classe I^ di un Istituto Tecnico milanese (Bianchi et al., 1998). Commentando una attività basata su problemi reali desunti da alcuni depliant di supermercati, la ragazza ha commentato :"*Ho capito perché la prof ci ha fatto fare questo lavoro Siccome lei sa che secondo noi la matematica non ha niente a che fare con la realtà allora ci fa lavorare con i volantini per convincerci che non è vero*". Si noti che l'insegnante "sa", non "crede": dunque il fatto è vero ! D'altra parte la ragazza va anche oltre osservando che a questo tipo di attività non era abituata, perché il modello di insegnante di matematica a lei familiare era quello che "*viene in classe, spiega e noi a casa facciamo gli esercizi*". Il disagio della studentessa era totalmente condiviso ala classe: infatti quando "finalmente" l'insegnante diede loro dei compiti da svolgere a casa in maniera tradizionale, notò un sollievo generalizzato e i compiti stessi furono davvero eseguiti in proporzione nettamente superiore a quella consueta.

[8] chissà che dietro certi "innamoramenti" improvvisi per l'informatica non ci sia davvero un atteggiamento del genere: la creatività della scienza non serve al potere, anzi può forse essere pericolosa….

quando non ci appare più corrispondente alla realtà oppure quando non ci garantisce più il successo nell' azione. Soltanto quando ci imbattiamo in evidenze che contraddicono quanto previsto dal modello mentale e non si accordano più con l' interpretazione della realtà che esso fornisce, oppure quando le inferenze che abbiamo tratto a partire del modello vengono smentite dai fatti, allora diventiamo disponibili ad accogliere un diverso modello.

Per " smontare" il modello mentale dello studente occorre che questo sia preventivamente conosciuto. Potremo così predisporre alcune situazioni critiche atte a evidenziarne le debolezze e inconsistenze. Diversamente, l' alunno semplicemente recepirà delle nozioni che egli riterrà nella propria mente senza metterle in effettivo contatto con il proprio modello, il quale rimarrà non " scalfito" dall' istruzione scolastica e alla lunga, una volta dimenticate le nozioni, riemergerà — come molti studi condotti su adulti dimostrano — nella propria ingenuità.

Per una educazione metacognitivo alla matematica

Una educazione di carattere metacognitivo alla matematica deve partire da un convinzione precisa dell' insegnante, e questa convinzione dovrà a sua volta essere sufficientemente forte da riuscire da un lato a mettere in crisi le false certezze ed i diversi misconcetti dello studente (ma anche del docente stesso…), dall' altro a opporsi ad un *milieu* consolidato nelle sue prassi didattiche. Nella scuola (e forse soprattutto in matematica) troppo spesso vige il " compromesso delle risposte corrette" (Gardner): insegnanti e studenti non sono disposti ad assumersi i rischi del comprendere e si accontentano dei compromessi, secondo cui insegnanti e studenti considerano che l' educazione abbia avuto successo quando gli allievi sono in grado di fornire le risposte accettate come corrette.

Tuttavia la scienza (qualunque scienza, matematica compresa) si evolve assai di più grazie agli errori che alle risposte corrette. Come sostiene Popper " evitare errori è un ideale meschino" . Lo sviluppo della conoscenza avviene se noi abbiamo il coraggio di affrontare problemi difficili, ma per questi l' errore è quasi inevitabile. Nessuno può evitare di fare errori; occorre imparare a imparare da essi..

Porsi esplicitamente l' obiettivo di una educazione matematica di tipo metacognitivo significa non accontentarsi di esercizi standard, o per lo meno non accontentarsi di risposte standard. Occorre procedere " per problemi" in senso lato: questo termine indica di solito la proposta di situazioni in cui lo studente non può limitarsi a sfruttare il bagaglio posseduto di conoscenze ed abilità, ma gli viene richiesto un intervento personale creativo.

In uno studio del 2001, dedicato alla proposta di attività per un significativo curriculum di matematica per la Scuola Primaria e Secondaria di I grado, la Commissione per l' Insegnamento della Matematica della Unione Matematica Italiana osservava esplicitamente che " porsi e risolvere un problema offrirà la possibilità di individuare il significato di una proposizione, di riconoscere approcci e percorsi risolutivi diversi, di attivare autonomamente processi di verifica del percorso seguito, di scegliere eventualmente ottimizzando fra soluzioni diverse" (UMI-CIIM 2001). Veniva così ribadita l' importanza (già presente in maniera molto chiara nei programmi del 1985 per la Scuola elementare) del lavoro sui problemi, dando delle indicazioni che ne sottolineano la valenza metacognitiva.

Ricordiamo la celebre affermazione di Polya secondo cui " risolvere problemi è una impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è il dono specifico del genere umano" . Dunque, la sfida posta da un problema è il modo migliore di fare appello all' intelligenza che ogni alunno possiede, per aiutarlo a sviluppare le proprie doti.

Quando si fanno tali considerazioni non ci si riferisce a quegli esercizi (ripetitivi e quindi utili a fissare l'apprendimento di un argomento già conosciuto, ma che possono facilmente ingenerare noia e frustrazione) che la prassi didattica scolastica chiama ormai comunemente " problemi" , bensì ad attività di tipo diverso. In primo luogo vengono evocate le " situazioni problema" , situazioni di apprendimento strutturate in modo da indurre negli studenti la formulazione di ipotesi o la ricerca di concetti non posseduti, permettendo così un apprendimento significativo tramite il collegamento di nuove scoperte con le conoscenze precedenti. Spesso questo tipo di situazioni viene scartato a priori dagli insegnanti in quanto richiede studi, preparazione, tempi difficilmente attuabili nella prassi didattica quotidiana (D' Amore 1999). Tuttavia, come cercheremo di mostrare, questa critica non è generalizzabile: è possibile operare " per problemi" in un modo non solo compatibile ma anche efficace, all' interno di una classe, purché l' insegnante per primo assuma un atteggiamento consapevolmente metacognitivo, uscendo dalla gabbia di una didattica totalmente trasmissiva e ripetitiva.

Si tratta di avere sempre presente che proporre un problema significa stimolare, interessare un alunno, lanciargli una sfida, spingerlo verso una ricerca personale che utilizzi le conoscenze già possedute per produrre nuove competenze. È naturalmente vero che un problema può non essere tale per tutti, ma può esserlo per alcuni mentre per altri è soltanto un esercizio più o meno difficile. Ricordiamoci che un problema esclude per sua natura la risposta immediata, la soluzione pronta; si ha un problema quando l' alunno deve lavorare sulla richiesta per arrivare ad una soluzione. Tuttavia un problema deve sempre risultare interessante, per spingere l' alunno a risolverlo; solo un coinvolgimento in prima persona può infatti far scattare la molla della necessità personale di risolvere un problema[9], la spinta che porta a superare tutte le difficoltà intrinseche per arrivare ad una conclusione.

Se però si punta sui problemi (e in generale su un approccio globalmente metacognitivo) anziché sulla risoluzione di esercizi standard, l' errore non solo va messo nel conto delle possibilità (dunque non va demonizzato e nascosto col bianchetto…) ma diventa anzi probabile e in qualche misura perfino auspicabile. Non solo la presenza di errori non è un segnale di difficoltà o incapacità[10] (neppure l' assenza di errori evidenti è in realtà un segnale che la conoscenza sia posseduta davvero…), ma proprio il lavoro sugli errori, propri e altrui, permette di passare dall' esame (e dalla valutazione…) dei prodotti a quello dei processi, spostando dunque le proprie energie dalla ricerca, spesso casuale oppure meccanica, del risultato " giusto" alla consapevolezza di poter " inventare risultati" , dunque di poter " creare" (perfino in matematica!).

Alcune esemplificazioni

Vogliamo qui presentare alcuni esempi di attività in classe che si dirigono nella direzione indicata, in una ideale continuità di curriculum, fino a riflessioni legate all' educazione degli adulti.. Riassumendo, si tratta di aiutare lo studente a pensare il suo pensiero, a diventare consapevole di come la conoscenza viene costruita. Questo andrà necessariamente realizzato attraverso un approccio metacognitivo implicito ma anche esplicito. Attività quali la verbalizzazione e il peer tutoring potranno rendere il soggetto consapevole, attraverso il confronto con gli altri, dei propri presupposti " teorici" e delle proprie operazioni mentali; l' uso delle tecnologie permetterà di esplicitare e tenere " traccia" del cammino percorso e anche di servire come motivazione e stimolo verso alcune riflessioni e conquiste concettuali..

L' atteggiamento metacognitivo che si pone come più efficace in questo tipo di attività è in buona parte quello descritto da Kuhn (1989): esso consiste in un insegnamento diretto (tramite l' esempio e il confronto) di strategie di pensiero e in un intervento indiretto per migliorare la propria conoscenza e apprendere nuovi schemi interpretativi e nuove strategie di ragionamento.

E' importante che lo studente sia consapevole e controlli la sostituzione delle vecchie strategie con le nuove (per un certo periodo esse coesistono e si alternano nel pensiero dello studente). In questo modo le strategie apprese possono essere trasferite a situazioni simili a quelle in cui sono state originariamente imparate.

Un modo efficace di lavorare per problemi prevede di riuscire a " riconoscere e rappresentare situazioni problematiche; impostare, discutere e comunicare strategie di risoluzione; risolvere problemi posti da altri; porsi

[9] Secondo una classica definizione psicologica gestaltista, "un problema nasce quando un essere vivente, motivato a raggiungere una meta, non può farlo in forma automatica o meccanica, cioè mediante un'attività istintiva o attraverso un comportamento appreso. L'esistenza di una motivazione e la presenza, nella situazione problematica, di un impedimento che non permette l'azione diretta creano uno stato di squilibrio e di tensione nel campo cognitivo di un individuo spingendolo ad agire per ricostruire l'equilibrio" (Kanizsa, 1973).

[10] Anche senza voler ricordare esplicitamente la scoperta della penicillina, l'esperienza di un ricercatore in qualsiasi disciplina scientifica è di solito molto più c di errori che di problemi risolti, anche se di solito soltanto questi ultimi verranno pubblicati.

autonomamente problemi e risolverli, in diversi contesti sperimentali, linguistici e matematici, in situazioni varie, relative a campi di esperienza scolastici e non" (UMI-CIIM, 2001)

Per ottenere questo si potranno seguire strade diverse, tenendo conto delle diverse età degli alunni coinvolti, ma esse dovranno tutte avere come centro il coinvolgimento diretto, la riflessione, la verbalizzazione da parte dello studente.

Scuola dell' Infanzia e I anno della Scuola Primaria

Ad alunni di scuola materna (Pertichino & Piochi, 2000) o dei primi due anni della scuola primaria si possono proporre situazioni di vita reale, eventualmente presentate in maniera iconica o sotto forma di fiaba (Piscitelli et al., 2001) invitandoli a " esplorare" le possibilità di soluzione, a scoprire che non tutte le situazioni e non tutti i problemi sono risolvibili, altri si possono risolvere in più di un modo: a volte c' è un modo " migliore" (più veloce, più efficace, più piacevole,…) altre volte no. Oltre agli esempi riportati nei lavori citati, vogliamo qui riferire un' attività svoltasi con alunni di una classe I elementare[11] a cui era stato chiesto che cosa fosse per loro un problema[12]; fra gli esempi da loro proposti è stato poi scelto e risolto collettivamente il seguente:

" [C' è un problema] *quando una macchina non ha più la benzina, perché non va più dove voleva andare"* .

Per concretizzare meglio la situazione, i ragazzi decidono che l' insegnante (Paola) sarà l' autista della macchina. Emergono tre ipotesi di soluzione:

1. *Si raggiunge a piedi un distributore e si porta una tanica di benzina alla macchina.*

Questa ipotesi viene criticata perché " *se il distributore è lontano, Paola deve camminare troppo*"

2. *Paola telefona a un amico che le porta la benzina.*

Anche in questo caso qualcuno obietta che l' amico potrebbe non rispondere al telefono oppure essere troppo lontano.

3. *Paola chiama un carro attrezzi e si fa portare al distributore più vicino*

Quest' ultima ipotesi di soluzione piace a tutti (anche per la presenza del carro-attrezzi…) e viene accettata da tutti.

Crediamo che valga la pena rilevare come la terza soluzione, quella ritenuta più valida[13], sia in realtà scaturita dalle critiche alle precedenti: la discussione ha permesso di osservare il problema da punti di vista diversi e di scoprire una strada non visibile in un primo momento.

Problemi verbali

In altra sede (Piochi, 2003; pp. 253-256) abbiamo proposto la traccia di un percorso di tipo linguistico e metacognitivo a partire da " problemi verbali" , anche da quelli presenti nei libri di testo. Tale percorso si snoda su tre direzioni principali : *Analisi del testo, Relazione Dati-Domande, Lavoro di controllo sulla soluzione* e punta a costruire le competenze indicate dall' UMI relative ai problemi e sicuramente coerenti con le richieste delle Indicazioni Nazionali:

- partendo da situazioni concrete note all' allievo o illustrate dall' insegnante, individuare gli elementi essenziali di un problema
- selezionare le informazioni utili
- ipotizzare una sequenza di passi che conduca ad una soluzione del problema

[11] L'attività è stata realizzata nell'anno scolastico 2002-2003 in classi dell'Istituto Comprensivo "Gamerra" di Pisa.

[12] Fra le risposte ve ne sono alcune che già tentano una "definizione" del concetto, mentre altre si limitano riportare esempi di situazioni di vita. Fra le prime "*È una difficoltà. Per esempio quando non sai come rimediare a qualcosa*"; fra le seconde : "*Quando uno è handicappato*", "*Quando un compagno ti butta un lapis sopra un armadio e non ci arrivi*", "*Non avere la casa è un problema*". In realtà, come si vede, c'è già una consapevolezza del reale significato di "problema" come compresenza di mèta e di ostacoli (Kanisza): gli esempi esplicitano la "definizione" sopra riportata.

[13] Un adulto osserverebbe che le prime due sono "a costo zero", mentre la terza no; ma naturalmente non è questo il punto ! Anche la storia della matematica è ricca di liti fra illustri scienziati per stabilire quale fra le dimostrazioni di un teorema fosse la più bella o quale fra le definizioni di un concetto fosse la più funzionale. Il fatto che l'insegnante (e lo studente) si aspetti che la soluzione di un problema sia unica e non sia soggetta a discussioni è una delle storture del nostro sistema scolastico ed è spesso alla radice di un atteggiamento che gli insegnanti secondari rimproverano agli studenti: la "passività" davanti alle correzioni degli errori. Ma se la soluzione segue dalle regole (immutabili e dogmatiche, che spesso lo studente pensa di conoscere) e non è quella che lo studente ha ricavato, significa che si è distratto; non c'è niente di nuovo e interessante da scoprire: a che serve ascoltare la correzione dell'insegnante?

- individuare le informazioni necessarie per raggiungere l' obiettivo (selezionando i dati forniti dal testo o ricavandoli dal contesto)
- individuare nel problema eventuali dati mancanti o contraddittori
- controllare la coerenza del risultato ottenuto con i dati del problema e con il contesto
- riflettere sul procedimento risolutivo seguito e confrontarsi con altre possibili soluzioni
- formalizzare il procedimento risolutivo seguito
- generalizzare il procedimento, stabilendo la possibilità o meno di applicarlo ad altre situazioni.

Senza qui ripetere quanto scritto nel lavoro sopra citato, riporto di seguito due attività, direttamente ispirate ad alcuni passi di tale percorso.

Scuola primaria: 3^ anno

Questa attività[14] è legata al lavoro sul testo e più precisamente al suggerimento di " Passare dal testo di un problema alla sua rappresentazione attraverso una icona (un testo narrativo, una drammatizzazione…). Esplicitare il contesto. Rielaborare il testo e rappresentarlo" (Piochi, 2003)

Essa inoltre sfrutta in maniera esplicita i meccanismi dell' apprendimento collaborativo[15],

Due classi 3^ di due diversi piccoli centri vicini si sono " lanciate una sfida" tramite le insegnanti, le quali condividono naturalmente la metodologia didattica sottostante. La sfida consisteva nell' inviarsi a vicenda un problema da risolvere. In realtà, come spesso accade quando si lavora " senza rete" dando spazio alla fantasia e all' intuizione, le proposte si sono discostate molto di più di quello che le insegnanti ideatrici dell' attività avessero progettato, pur conservando caratteristiche parallele soprattutto dal punto di vista dell' intervento metodologico.

Una delle due classi è partita da un problema inventato (abbastanza banale), " mascherandolo" all' interno di un testo narrativo piuttosto ampio. Il passaggio dalla forma " minima" a quella più ampia ha seguito i canoni classici della elaborazione di un testo collettivo, a cui era stata aggiunta la consegna di riportare nel testo tutte le informazioni matematiche ma di " nasconderle" il più possibile. Riportiamo di seguito il testo elaborato collettivamente, invitando il lettore a scoprire da solo il problema sottostante.

Nel cuore della savana, in Africa, vivevano tante specie di animali.

La savana era molto calda e arida, le piogge erano scarse, qua e là si vedevano alberi e cespugli spinosi che erano simili a ricci.

Nella prateria viaggiavano branchi di zebre, bufali, leoni, antilopi, gazzelle e giraffe.

In lontananza scorreva un fiume in cui si erano stabiliti trentadue perfidi coccodrilli dai denti affilati come rasoi.

Un giorno un branco di cinquanta zebre, terrorizzate da dei bracconieri, si avvicinò al galoppo verso il territorio dei coccodrilli, senza sapere che era un luogo pericoloso.

Nell' acqua i coccodrilli erano in agguato, immobili come tronchi d' albero.

Arrivando al fiume in maniera agitata e sparpagliata, si resero conto del rischio a cui andavano incontro solo quando erano già in acqua ed era ormai troppo tardi!

All' improvviso i coccodrilli schizzarono fuori con un balzo ed ognuno di loro addentò la propria preda, la trascinò sott' acqua e la divorò all' istante senza masticarla.

Mentre i coccodrilli erano distratti perché stavano assaporando la gustosa preda, le zebre sopravvissute sfruttarono questo momento per attraversare il fiume e darsela a " zoccoli levati" .[16]

---

[14] L'attività è stata realizzata nell'anno scolastico 2003-2004 dalle classi 3^ delle Scuole Elementari di Catena e di Valenzatico del II circolo di Quarrata (PT).

[15] Fondamentale è stato infatti il lavoro collettivo durante il quale gli alunni che erano riusciti nel loro testo individuale a inserire le informazioni matematiche stabilite sono stati di supporto agli altri.

[16] Il problema di origine era il seguente: *"Nella savana c'è un branco di 50 zebre. Esse devono attraversare un fiume in cui ci sono 32 coccodrilli e ciascuno di loro mangia una zebra. Quante zebre riescono a sopravvivere e ad attraversare il fiume?"*

La risposta dei coetanei è stata non solo un proseguimento della storia con un altro problema, ma anche l' invio di un gioco ispirato alla storia, con regole elaborate autonomamente ed una mappa del terreno di gioco. Questi dunque hanno dunque operato un significativo arricchimento dell' attività proposta, integrandola con elaborazioni di tipo grafico, ambientale, sociale e motorio.

A loro volta, i coetanei avevano lanciato una sfida di tipo diverso, tramite il seguente problema:

In classe nostra abbiamo fatto un cartellone (" Bambole di 3^ B") che sintetizza alcune caratteristiche delle bambole.
Possiamo vedere che 11 bambole hanno le scarpe e 3 bambole hanno il cappello.
Tutte le bambole realizzate sono 16.
Quante sono le bambole che hanno sia le scarpe che il cappello?

Il problema non è stato " mascherato" (probabilmente perché sembrava già abbastanza difficile così). I ragazzi hanno avuto bisogno di leggere più volte il problema, che hanno definito " *molto strano*" perché con i dati individuati non sono riusciti a trovare un' operazione adatta a risolverlo: ognuna delle quattro operazioni non era quella giusta. Agli alunni sembrava impossibile non trovare soluzioni, dal momento che gli altri ragazzi erano riusciti a trovarle! Dopo una lunga discussione è stato proposto di rappresentare il problema con un disegno[17], per la difficoltà di visualizzare le informazioni numeriche in tante combinazioni diverse. In questo modo tutto è apparso più facile e sono state individuate le diverse soluzioni, giungendo alla scoperta che, pur rappresentando differentemente il problema, certi risultati si ripetevano.

Durante questa attività le due classi hanno avuto modo di esercitarsi in un lavoro collettivo di buon livello sia nella produzione e interpretazione di testi (il lavoro sulle zebre e i coccodrilli) sia in attività di vera e propria " ricerca" (il problema delle bambole). Che lo spirito fosse proprio questo lo dimostra la dichiarazione di uno dei primi solutori di quest' ultimo: " *In classe non eravamo riusciti a trovare nessuna soluzione, ma a casa ho voluto provare una idea che mi era venuat. Bisognava trovare un modo di disegnare le bambole, i cappelli… Alla fine sono riuscito a trovare una soluzione, l' ho scritta su un foglio e l' ho portata in classe. E in classe ho visto che anche A. ne aveva un' altra che era diversa dalla mia e infatti l' aveva fatta in un' altra maniera*" . Questa frase rende bene il processo (metacognitivo) mediante il quale il pensiero passa dalla riflessione (collettiva) sulla situazione alla ricerca di un modello rappresentativo (quasi " astratto" per quanto lo consenta l' età) all' applicazione di questo alla situazione, al confronto fra diverse soluzioni e diversi modelli, fino all' elaborazione di un metodo valido e compreso da tutti, il quale a sua volta porta alla scoperta di *tutte* le possibili soluzioni del problema.

Scuola Secondaria di I grado- classe I^

L' attività che segue[18] è invece relativa alla relazione fra i dati di un problema e la domanda e più precisamente alla proposta di " formulare la domanda appropriata in problemi con domanda mancante, formulare tutte le domande possibili in una situazione problematica senza domanda, scegliere tra più domande quella più appropriata per sfruttare tutti i dati considerati […]" (Piochi, 2003).

Nelle classi finali della scuola elementare e nella prima media è stato proposto un approccio diverso al problema " stereotipo" , privilegiando l' interazione con il testo piuttosto che la risoluzione. È stato scelto un problema tra quelli presenti nel libro di testo, eliminando la domanda e si è chiesto ai ragazzi di formulare tutte le domande che venivano loro in mente. Nella classe I^ media, ad esempio, è stato proposto il seguente " problema" :

Cinque ragazzi decidono di organizzare una festa. Comprano 16 lattine di bibita a mezzo euro l' una, 5 scatole di biscotti a un euro e mezzo l' una e 12 focacce a 60 centesimi l' una…

---

[17] Ogni insegnante sa quanto sia di solito sentita come artificiale e eseguita di malavoglia la consegna di rappresentare con un disegno il testo di un problema.. Ebbene in questo caso l'idea di un disegno come aiuto è stata avanzata dai ragazzi stessi.

[18] L'attività è stata realizzata nell'anno scolastico 2002/03 in alcune classi 5^ elementare e 1^ media dell'Istitut Comprensivo "Gamerra" di Pisa.

I ragazzi hanno lavorato a piccoli gruppi; ogni gruppo doveva proporre alcune domane relative al testo, che fossero coerenti con i dati forniti. Fra le domande formulate, la maggior parte era del tipo usuale per problemi del genere; ad esempio:

Quanto spendono in tutto ?

Se vogliono dividere la spesa, quanti soldi deve mettere ciascun ragazzo?

Quanto costano tutte le lattine?

Quanto costano tutte le focacce?

Tuttavia sono emerse una serie di domane " inattese" collegate alla situazione, a riprova del bisogno di contestualizzazione e del " coinvolgimento" comunque suscitato; ad esempio:

Quanti sono gli invitati?

Perché solo 5 ragazzi?

Se sono così pochi perché decidono di comprare così tanta roba da bere?

Perché hanno deciso di spendere 22,70€ ?

Come mai costano 60 centesimi le focacce?

Successivamente le domande sono state esaminate da tutti e si è discusso sul loro significato e sulla " gerarchia" fra di esse: sia dal punto di vista della relazione con il testo, sia per quanto riguarda l' ordine di intervento in un ipotetico algoritmo risolutivo. Questo punto è risultato naturalmente il più interessante dal punto di vista dell' apprendimento della disciplina e i commenti finali dei ragazzi hanno mostrato come ne avessero avuto piena consapevolezza:

Mi è piaciuto molto sentire le domande degli altri

Oggi ho capito molto bene che in un testo di due righe posso trovarci molte domande, ma se rifletto sui dati, con attenzione

Io ero abituato a una lista di domande …

Io invece ero abituato a una domanda restrittiva…

... anche in Argentina si usavano domande restrittive

Io oggi ho imparato ad usare tutti i dati di un problema e che in un problema c' è sempre una domanda chiave che contiene tutti i dati

Ho capito che c' è una domanda regina che contiene tutti i dati e include le altre domande

L' Algebra nel Biennio della Scuola Secondaria Superiore

Come è ben noto, l' Algebra rappresenta in generale uno scoglio considerevole per gli studenti al loro ingresso nella Scuola Secondaria Superiore. Uno dei motivi della difficoltà di questa particolare branca della matematica risiede naturalmente nella sua specificità: " Ciò che distingue l'algebra in modo essenziale dall'aritmetica e dalla geometria è il fatto che il suo oggetto non consiste nel trovare proprio i valori delle quantità cercate, ma *nell'individuare il sistema delle operazioni* da eseguire sulle quantità date per derivarne le quantità cercate, secondo le condizioni del problema. La sequenza di tali operazioni è quello che in algebra si chiama una *formula*" (Lagarange). Come si capisce perfettamente, si tratta di un tipico problema metacognitivo applicato alla matematica: non si tratta di riflettere sui dati, ma sulla relazione fra questi

In altre parole si tratta di spostarsi da una semantica ad una sintassi, da un linguaggio naturale a un linguaggio simbolico, da una relazione a una procedura…. Può essere utile offrire alcuni esempi che chiariscano al lettore la difficoltà concettuale di tale passaggio:

- Nei precedenti livelli scolastici è spesso il linguaggio a guidare il pensiero, potendo fare affidamento su (o comunque promuovendo l' acquisizione di) procedure concrete:

  " *Se un etto di prosciutto costa 3.50 euro quanto costano 3 etti?*" :

  3,50 [:1] x 3 = 10,50.

“ *Se raddoppio un numero e aggiungo 3 alla somma, trovo 7. Quale è il numero?*”

$$2x+3=7 \quad \Rightarrow \quad x= 2 \; .$$

Oltre un certo livello di difficoltà, questo non funziona più:

“ *Se 2/3 di una certa quantità sono pari a 3,50, quanto valgono 4/7 della stessa quantità ?*” :

$$3{,}50 : (2/3) \times (4/7) = 3.$$

“ *Se raddoppio un numero e aggiungo 3 alla somma, trovo lo stesso risultato che ottengo se lo moltiplico per 5 e tolgo 6 dal risultato. Quale è il numero?*”

$$2x+3=5x-6 \quad \Rightarrow \quad 3+6 = 5x-2x \quad \Rightarrow \quad 9=3x \quad \Rightarrow \quad x= 3 \; .$$

- Nel linguaggio naturale (e in quasi tutte le altre materie scolastiche…) il controllo semantico è essenziale e viene naturale. In algebra è spesso la sintassi a guidare, la semantica segue ! Tutti conoscono quei “ giochetti magici” con i quali, dopo una serie di operazioni, si riesce a indovinare il numero pensato da un altro, o la sua data di nascita… Ebbene, essi sono nient’ altro che “ verbalizzazioni” di sequenze algebriche che conducono a una equazione o una identità, la cui comprensione può avvenire a posteriori, non certo in anticipo (eccetto che per il suo ideatore). D’ altra parte spesso la sintassi, cioè la possibilità di rappresentare i dati come quantità astratte permette “ scoperte” che la semantica non consente. Si consideri ad esempio il seguente problema: “ *Sia dato un rettangolo. Come cambia la sua area se si aumenta un lato del 10% e si diminuisce l'altro del 10% ?*” . La soluzione naturalmente non è ovvia e sembrerebbe dipendere da quale dei due lati si aumenta o diminuisce: considerando i lati come variabili x e y, l’ applicazione di una semplice formula algebrica[19] fornisce subito la risposta esatta e generale: l’ area diminuisce sempre dell’ 1% !

A queste difficoltà intrinseche dell’ Algebra, la prassi didattica classica aggiunge di propria mano il peso di una tradizione che si concentra assai spesso sull’ apprendimento mnemonico e su una valutazione strettamente legata alla corretta applicazione delle formule al fine di trovare un risultato prefissato ma spesso nei fatti “ non verificabile” per lo studente se non ripetendo accuratamente tutti i passaggi effettuati, moltiplicando naturalmente così le occasioni di errore. Ecco dunque che lo studente non riesce ad applicare le conoscenze computazionali algebriche (anche buone…) al problem solving; assegna spesso alle formule regole e significati "inventati", anche pseudo-coerenti; non riesce a usare l'algebra come strumento per comprendere, individuare e comunicare correlazioni, svelare relazioni strutturali,… ma solo come uno strumento di "calcolo"; in ogni caso lo studente non si sente "padrone" del procedimento.

Per tentare di superare questa empasse occorre restituire all’ algebra un suo “ senso” L'algebra è un codice convenzionale, ma non arbitrario, in quanto si tratta di un prodotto culturale e condiviso. La comprensione del codice algebrico coinvolge aspetti cognitivi corrispondenti ai meccanismi di comprensione delle “ regole di un gioco". D’ altra parte, in generale l’ apprendimento di un codice convenzionale avviene solo a livello di mediazione sociale: afferro una regola in quanto interiorizzo le funzioni di un sistema di notazioni o azioni socialmente condiviso. È il caso dell’ apprendimento di un linguaggio di programmazione o di un software, è quanto avveniva nelle “ botteghe d'arte” rinascimentali…

Da qui alcuni spunti didattici ispirati a meccanismi di tipo metacognitivo da attuare in classe o in attività di piccoli gruppi sotto la supervisione di un insegnante che si ponga come “ modello metacognitivo di apprendimento” piuttosto che “ trasmettitore” di formule e conoscenze note, che sia disponibile a porre (o rilanciare) domande, riservando le risposte ai casi in cui esse servano a risparmiare agli studenti un cammino eccessivamente lungo o faticoso, ma di cui essi hanno comunque individuato la direzione:

- Situazioni ricche e stimolanti usando anche una calcolatrice o un software (dato un grafico o una tabella, costruire una formula…)

[19] Per il lettore non esperto: si tratta della formula relativa al prodotto di una somma di due fattori per la loro differenza:

$$(x - x/10)(y + y/10) = xy\,(1 - 1/10)(1 + 1/10) = xy\,(1 - 1/100).$$

- Invitare a discutere la sequenza di passaggi, il loro senso,…
- Provocare discussioni
- Ristrutturare il "contratto didattico": non solo costruire "identità" ma "identità false", passaggi sbagliati,…

(Ri-)Educazione degli adulti: verso una matematica ricca di senso.

Sempre più spesso si pone in questi anni il problema di una (ri-)educazione degli adulti alla matematica. Talvolta si tratta di adulti traumatizzati, i quali hanno visto diminuire alcune cruciali abilità di tipo cognitivo[20] a seguito di incidenti; più spesso ci si rivolge ad adulti che devono " ri-orientarsi" professionalmente; infine si può considerare anche la crescente tendenza a considerarsi in formazione permanente lungo tutto l' arco della propria esistenza. In questi casi ci si deve sempre e comunque scontrare contro un difficile rapporto con la matematica costruito negli anni della scuola e nutrito con una specie di diffidenza-deferenza nel corso degli anni, secondo quanto notavamo nell' introduzione al capitolo.

Occorre allora costruire anche nell' adulto un diverso sistema di percezione nei riguardi della matematica, guidandolo a scoprire il significato e i meccanismi di ragionamento dietro alle diversi applicazioni, ai vari tipi di problemi. Occorre ancora una volt un proposta di tipo metacognitivo che, sistematicamente, parta dai problemi. Riferisce Tobias (1993; ed orig. 1978) che nel suo istituto[21] i nuovi arrivati sono accolti chiedendo loro di risolvere il seguente problema:

" *La mia auto ha percorso già 40.000 km. Siccome sono un tipo molto preciso, a intervalli regolari ho provveduto ad effettuare la rotazione delle gomme (inclusa quella di scorta). Così, alla fine per quanti km ha viaggiato ognuna delle gomme ?*'

Dopo che l' hanno risolto, essi vengono invitati a confrontare il loro metodo risolutivo con quelli di chi li ha preceduti: la scoperta che un problema simile possa avere non uno ma vari metodi diversi di risoluzione costituisce per la stragrande maggioranza delle persone un enorme e liberatorio shock culturale, primo passo verso un diverso tipo di apertura alla matematica.

Naturalmente, se questo è quanto si può fare nei riguardi di adulti che hanno avuto una formazione matematica di un tipo " tradizionale" , molto va però promosso perché si diffonda nelle nostre scuole la consapevolezza dei limiti di tale formazione e ci si diriga verso una proposta più completa e sensata, dove la matematica sia uno strumento del pensiero e come tale si rapporti alle altre discipline non solo per fornire loro nomi, cifre e calcoli ma metodologie e conoscenze di un tipo specifico. Tali metodologie e conoscenze hanno necessità, per svilupparsi, di una proposta didattica di tipo metacognitivo, proprio perché metacognitivo è l' atteggiamento che si richiede.

In questo modo offriremo anche ai nostri studenti il " senso" del loro apprendimento matematico, perché li aiuteremo a rivedere dall' alto il cammino percorso, cammino che per la matematica (forse più che per le altre discipline) deve essere a spirale, offrendo e richiedendo ad ogni giro uno sguardo sempre più profondo ed una migliore padronanza di quanto appreso nei livelli precedenti.

---

[20] Non si tratta qui soltanto di competenze numeriche o di calcolo, anche se il nome attribuito alle difficoltà in questo settore (discalculia o acalculia) lo lascerebbe intendere (è questa un'altra manifestazione della singolare identificazione della matematica con l'aritmetica). Si tratta invece molto spesso di difficoltà procedurali: il non saper più risolvere semplici problemi aritmetici o geometrici si collega alla difficoltà nel compiere determinate sequenze di azioni nella vita di ogni giorno. Da qui la necessità e il vantaggio di intervenire con metodi di tipo prevalentemente verbale e metacognitivo, tentando di sfruttare le competenze cognitive intatte per ricostruire quelle deteriorate.

[21] Una delle più prime "Math Clinisc" degli USA, dove si "rieducano" gli adulti (soprattutto le donne, a quanto asserisce l'autrice) alla matematica.

Bibliografia

Brousseau G. (1980). Les échecs électifs dans l' enseignement des mathématiques a l' école élémentaire, *Revue de laryngologie, otologie, rhinologie*, 101, 3-4, 107-131

Brousseau G. (1980). L' échec et le contrat, *Recherches en didactique des mathématiques*, 41, 177-182

D' Amore B. (1999), *Elementi di didattica della matematica*, Bologna, Pitagora Editrice

Cattabrini U. & Di Paola V. (a cura di) (1997), *Matematica e poesia: un tema difficile* ?, IRRSAE Toscana, Firenze

B. D' Amore e P.Sandri, (1996) Fa' finta di essere..., *L' insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, n.3, 223-246

Aschieri I., Pertichino M., Sandri P. e Vighi P. (a cura di) (1998), *Matematica e affettività. Chi ha paura della matematica ?*, Bologna, Pitagora

Bianchi M.P., Pertichino M. & Piochi B. (1998), Recupero di concetti di base nel primo anno di scuola superiore attraverso la proposta di situazioni a-didattiche, *L'Educazione matematica*, s. V, 3 (1), pp. 30-43

Deri M., Sainati Nello M. & Sciolis Marino M. (1983). Il ruolo dei modelli primitivi per la moltiplicazione e la divisione, *L' insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 6, 6, pp. 6-27

Mason L. (1995), Lo sviluppo delle rappresentazioni. In A. Antonietti (a cura di), Il divenire del pensiero, Milano, Raffaello Cortina

Cavallini G. (1995). *La formazione dei concetti scientifici*, Firenze, La Nuova Italia

Kanizsa G. (1973), *Il ' problem-solving' nella psicologia della gestalt*, in Mosconi G. e D'Urso V., *La soluzione dei problemi*, Firenze, Giunti-Barbera

Kuhn D. (1989). Children and adults as intuitive scientists, in *Psychological Review*, 96, pp. 674-689

Pertichino M. & Piochi B. (2000), *Le attività matematiche nella Scuola dell'Infanzia come punto di partenza di curricola verticali*, in B. D'Amore (a cura di), *Didattica della matematica nel III millennio,* Pitagora Ed., Bologna, pp.121-137

Piochi B. (2003). *" Far di conto" o " fare matematica" : quale educazione matematica per il cittadino ?* In Cambi F., Bernardi G. e Viaggi M. (a cura di), *Curricoli europei a confronto.* Edizioni PLUS, Università di Pisa, pp. 207-258

Piscitelli M., Piochi B., Chesi S. e Mugnia C., 2001, *Idee per il curricolo verticale. Progettare percorsi in Lingua, Matematica e Storia*, Napoli, Tecnodid

Polya G. (1967). *Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica nel metodo matematico*, Milano, Feltrinelli.

Vygotskij L.S. (1983). *Il processo cognitivo*, Torino, Boringhieri

Unione Matematica Italiana (2001), *Matematica 2001. Materiali per un nuovo curriculum di matematica*, XXII Congresso UMI-CIIM, Ischia, 15-17 novembre 2001

Tobias S. (1993). *Come vincere la paura della matematica*, Milano, Longanesi