Per il curricolo verticale di matematica

di Giuliano Spirito, 2003

Alcuni nodi intorno a cui organizzare la didattica della matematica

Nella discussione sui *curricoli di matematica* si fa un gran ragionare su quelli che di volta in volta vengono chiamati saperi essenziali, conoscenze minime, competenze elementari, nuclei fondanti, ecc. Ciascuna di queste dizioni sottintende un approccio almeno in parte diverso al problema; ma comune è il tentativo di " asciugare" la disciplina, individuando alcuni nodi intorno a cui riorganizzarla.

Passiamo brevemente in rassegna alcuni di questi tentativi.

Nell' indagine internazionale TIMSS sull' apprendimento della matematica e delle scienze al termine della scuola media, le prove di matematica vertono sulle seguenti aree di contenuti:

- frazioni e numeri (calcoli con numeri interi, frazioni e decimali, arrotondamenti, calcolo delle percentuali, rapporti, proporzionalità, ecc.),
- misure (unità di misura, calcolo di perimetri e aree, ecc.),
- geometria (coordinate dei punti in un piano e su una retta, angoli, rette parallele, triangoli, riflessioni e rotazioni, ecc.),
- algebra (sequenze e semplici relazioni, espressioni, semplici equazioni, rappresentazione algebrica di situazioni, ecc.),
- rappresentazione e analisi di dati e probabilità.

Due osservazioni si impongono: la commissione che cura l' indagine indica di fatto un insieme di contenuti da privilegiare (quelli intorno a cui organizza le prove e effettua le comparazioni) nella scuola di base; alcuni di questi contenuti sono di fatto marginali o assenti nella pratica didattica della nostra scuola media (si pensi alle trasformazioni geometriche e alla probabilità).

In occasione del seminario " Quali competenze per i nuovi curricoli" *A.M. Arpinati (Rif. 1)* elenca in questi termini i saperi minimi in ambito matematico al termine dell' obbligo (15 anni):

1. insiemi numerici e operazioni (per usare criticamente gli strumenti di calcolo),
2. geometria euclidea (per una migliore conoscenza dello spazio a due e a tre dimensioni),
3. proporzionalità, funzioni, modelli (per meglio interpretare la realtà che ci circonda),
4. cenni di algebra, fino alle disequazioni (per meglio operare delle scelte),
5. analisi di dati, loro interpretazione e codici di lettura (per interpretare molti dei mass-media che sono intorno a noi)

Anche in questo caso, due osservazioni: in primo luogo, la Arpinati, accanto a ogni argomento, colloca la finalità che ad esso si dovrebbe attribuire, il che contribuisce a chiarire il taglio con cui dovrebbe essere affrontato; rispetto ai contenuti dell' indagine TIMSS sopra ricordati, ci sono qui consistenti riduzioni. Ad esempio, sono " cadute" – e la faccenda, alla luce della notazione precedente sul curricolo reale praticato nella scuola media, non sembra casuale – le trasformazioni geometriche e la probabilità.

Ancora: in occasione delle stesse giornate bolognesi, *O. Robutti (Rif.2)* individua, come nuclei fondanti del sapere matematico, i numeri e le operazioni tra essi, le funzioni, i dati e la loro elaborazione, i modelli, la dimostrazione, la misura. In questo caso è difficile un raffronto con le proposte precedenti. Si passa dall' indicazione di contenuti all' individuazione di concetti-chiave; inoltre, questi ultimi appaiono espressi in forma troppo sintetica per poterne apprezzare in pieno il senso; si può forse segnalare la totale assenza di nozioni fondanti di ambito geometrico.

Infine, l'Unione Matematici Italiani si è esercitata nell'elaborazione di un *Syllabus (Rif.3),* dove sono elencate le conoscenze e le capacità che si ritengono necessarie per accedere alle facoltà scientifiche. Tali conoscenze e capacità sono organizzate in cinque temi: strutture numeriche, aritmetica; algebra elementare, equazioni, disequazioni; insiemi, elementi di logica, calcolo combinatorio, relazioni e funzioni; geometria; successioni e funzioni numeriche. Dopodiché, per ciascun tema vengono dettagliati i relativi contenuti e le relative capacità.
Sarebbe troppo lungo dar conto dell'intero contenuto del Syllabus. Ci limitiamo a registrare un aspetto che ci sembra degno di nota e, a voler essere coerenti, gravido di conseguenze. Nel condivisibile sforzo di essenzialità, il documento dell'UMI si spinge fino a espungere l'intero calcolo differenziale e integrale dalle conoscenze matematiche indispensabili per affrontare le facoltà scientifiche. Da questa scelta non si traggono, però, tutte le conseguenze, perdendo forse l'occasione di ripensare *ex-novo* un curricolo "liberato" infine dallo strapotere dell'asse algebrico-analitico.
Altri contributi *(Rif. 4)* puntano, piuttosto che a individuare alcuni contenuti essenziali, a proporre alcune consapevolezze "in uscita" come punto di riferimento nella costruzione del curricolo:

1. consapevolezza del fatto che la matematica è una costruzione degli esseri umani, suscettibile di aggiustamenti e svolte;
2. consapevolezza del fatto che gli oggetti della matematica sono oggetti mentali, con un rapporto controverso con la realtà, ma che, ciò nonostante, la matematica è utile per analizzare in modo ordinato alcune situazioni complesse e per fare ragionevoli previsioni (a volte in termini di certezza, a volte in termini di probabilità) sull'andamento di fenomeni naturali o sociali;
3. consapevolezza che lo studio della matematica serve prima di tutto a pensare meglio; consapevolezza dell'importanza del linguaggio nel fare matematica (in termini di precisione, ma più che altro, in termini di capacità di contestualizzare);
4. consapevolezza dell'importanza dell'argomentazione (e della dimostrazione, che ne è la variante più rigorosa); consapevolezza del duplice livello, semantico e sintattico (interrogarsi sul senso di ciò che si fa, ma, al tempo stesso, prendere gusto a "giocare secondo regole");
5. consapevolezza delle diverse modalità con cui si affrontano i problemi in matematica (concentrando l'attenzione sul procedimento: da quali dati partire, quale operazione fare per prima, ecc.; oppure sulle relazioni che legano tra loro i dati) e del legame di tali diverse modalità con due concetti-chiave della matematica, rispettivamente il concetto di funzione e il concetto di relazione;
6. consapevolezza del rapporto del sapere matematico con altri saperi (scienze sperimentali, filosofia, informatica, ma anche musica, pittura, letterarastura); ecc.

Quale matematica nella scuola (con particolare riguardo alla scuola di base)

Le finalità dello studio della matematica sono essenzialmente di tre tipi: strumentali, formative e culturali:

- Un saper fare di conto attualizzato alla complessità della società si presenta necessariamente come più sofisticato e articolato: il calcolo aritmetico, oltre che mentale e scritto, diventa anche calcolo con l'ausilio di macchine; e non esaurisce le capacità strumentali richieste, che prevedono, ad esempio, anche capacità di leggere dati rappresentati in vario modo o di valutare una probabilità. Ma un moderno saper fare di conto è anche qualcosa di più: capacità di decodificare informazioni, capacità di progettare e costruire modelli a cui ancorare il ragionamento, capacità di operare scelte in situazioni di incertezza. Il che comporta la centralità di un approccio "per problemi" alla matematica e, immediatamente, rinvia al secondo tipo di finalità, quelle formative.

- La matematica nella scuola è, prima di tutto, sviluppo di capacità cognitive. Ovvero, detto in altre parole, il lavoro matematico è strumento di analisi di concetti, è luogo privilegiato di costruzione di modalità di pensiero. Solo la valorizzazione di questo aspetto formativo consentirà alla conoscenza matematica di contribuire a una " cittadinanza" piena, critica e consapevole.
- Lo studio della matematica si colloca all' interno del processo di formazione di una dimensione culturale scientifica. Anche nell' incontro con gli aspetti più " strumentali" della disciplina (aspetti strumentali che, peraltro, sono ricchi di implicazioni cognitive), non va smarrito il senso di un processo culturale faticoso, controverso, storicamente agito, che attiene alla matematica come a ogni altra costruzione intellettuale umana.

In vista di queste finalità, acquisisce un grande rilievo il tema delle modalità di lavoro da privilegiare, in quanto funzionali ad esse: modalità di lavoro plurali, che alla lezione tradizionale affiancano, in particolare, la dimensione laboratoriale. E acquista rilievo anche il tema del linguaggio: il linguaggio rigoroso è un obiettivo di lungo periodo, che non deriva da pedanterie e forzature volontaristiche, ma da un lavoro di scavo attento ai processi di produzione verbale, a partire da quelle concrete, imprecise ma ricche di significato soggettivo, degli allievi.
A quali obiettivi specifici, a quali contenuti rinviano queste finalità?
Può essere utile riprendere in mano il documento di indirizzo per la costruzione del curricolo prodotto dalla commissione per il riordino dei cicli (documento tuttora fondamentale per il ripensamento dei curricoli, sia pure limitatamente alla scuola di base). Questo *documento (Rif.5)* individua quattro nuclei tematici (apprezzabile sforzo di ricondurre a pochi nuclei la pluralità di obiettivi e contenuti): *il numero*, *lo spazio e le figure*, *le relazioni*, *i dati e le previsioni*.
Il nome dei quattro nuclei tematici evoca una precisa suggestione: non si deve pensare a una trattazione organica, benché elementare, di aritmetica, geometria e così via, ma a un complesso di attività attraverso cui si realizzi un primo incontro con alcuni concetti fondanti (numero, figure, ecc.).
Vi sono poi tre nuclei trasversali (*misurare*, *argomentare e congetturare*, *risolvere e porsi problemi*) a cui non corrispondono specifici contenuti, facendo essi riferimento a attitudini che dovrebbero essere sviluppate nel complesso dell' attività matematica (e non solo).
Una prima questione: dopo tanto parlare di area logico-matematica, il termine *logica* non compare nelle indicazioni curricolari; significa che non si deve più *fare logica*? In realtà la logica è ampiamente presente nel documento, ma, giustamente, nella forma adeguata alla scuola di base: da una parte, logica come lavoro di scavo sulla lingua; dall' altra, logica come attività di costruzione e di confronto di ipotesi, come esercizio di argomentazione a favore o contro di esse; e, ancora, logica come classificazione di oggetti secondo proprietà e come analisi delle relazioni tra elementi di un insieme. Dunque, ciò che viene messo da parte non è la logica, ma l' equivoco per cui essa consisterebbe essenzialmente nella considerazione di qualche tavola di verità o di qualche altro formalismo poco significativo.
Dato alla logica quel che è della logica, prendiamo ora in considerazione il primo dei nuclei tematici: *il numero*. Troviamo qui l' ovvia esclusione del calcolo letterale e delle equazioni; ovvia giacché si tratta di indicazioni curricolari pensate per la fascia di età 3-13 anni, laddove questi argomenti sono normalmente sviluppati nell' ultimo anno della scuola media; ancora più ovvia per i docenti che sono da tempo convinti che nella scuola di base (anche nella tradizionale configurazione elementari + medie) sia intempestivo, inutile e in definitiva controproducente proporsi obiettivi relativi alla manipolazione formale di simboli, togliendo spazio alla – questa sì necessaria – fondazione stabile di un calcolo semanticamente forte (aritmetica ragionata, approssimazioni e ordini di grandezza, principi del calcolo mentale, ecc.). Ciò non vuol dire, naturalmente, precludersi l' uso di

lettere per indicare quantità indeterminate o incognite; vuol dire, però, non prevedere lo sviluppo sistematico del calcolo letterale e delle tecniche risolutive delle equazioni.
Una scelta meno ovvia, ma decisamente opportuna, è quella di riequilibrare rilievo e peso delle due forme di scrittura dei numeri razionali, la notazione decimale e la rappresentazione in forma di frazioni. Il fatto è che le due diverse scritture aprono scenari e sono funzionali a obiettivi radicalmente diversi. Infatti, un eventuale privilegio concesso alla scrittura decimale avrebbe una serie di implicazioni: consentirebbe di unificare le notazioni per i numeri nell' ambito della matematica e delle scienze sperimentali; farebbe emergere con forza il tema dell' approssimazione; favorirebbe un rapporto positivo con gli strumenti automatici di calcolo (di cui il calcolo mentale, anche approssimato, è la necessaria controparte). La scrittura dei numeri in forma di frazioni è invece funzionale a tutt' altro scenario: la caratterizzazione rigorosa dei razionali, in termini di classi di equivalenza di coppie ordinate di interi (o, più semplicemente, di classi di equivalenza di frazioni); l' evidenza della chiusura dei razionali rispetto alle quattro operazioni aritmetiche, evidenza che scaturisce dall' esistenza di semplici algoritmi per ciascuna operazione frazionaria; più in generale, lo sviluppo di un' attitudine alla manipolazione formale di simboli. Due scenari diversi, entrambi certamente istruttivi; è però innegabile che nella prassi didattica l' attenzione è centrata sulla scrittura frazionaria, sfociando nell' ampio (si potrebbe dire inopinatamente pervasivo?) spazio riservato al calcolo di espressioni frazionarie sempre più complicate. Probabilmente la situazione andrebbe capovolta, giacché lo scenario " scrittura decimale" evoca problematiche (in slogan: la matematica del più o meno) di grande valore e perfettamente adeguate alla fondazione di una sensibilità alle quantità che dovrebbe essere una delle grandi scommesse della formazione matematica di base, laddove lo scenario " scrittura frazionaria" attiene a criteri di completezza, di eleganza della costruzione, di conquista di abilità di manipolazione formale che sono, per così dire, di secondo livello. Un capovolgimento di questo tipo – per le implicazioni richiamate – potrebbe assurgere al ruolo di " madre di tutte le scelte" in ambito numerico.
Per quanto riguarda il nucleo tematico *lo spazio e le figure*, al di là dei contenuti, abbastanza classici, ci limitiamo a segnalare il tipo di approccio che viene delineato: costruttivo, piuttosto che definitorio, con l' attribuzione di un valore " generativo" (di nozioni e di osservazioni relative alle proprietà delle figure) alle trasformazioni geometriche (ancora scarsamente " praticate" nella nostra scuola).
Nel nucleo *le relazioni*, troviamo una serie di strumenti concettuali di grande importanza, cosicché esso si colloca al confine tra quelli tematici e quelli trasversali. Al suo interno troviamo infatti le modalità di rappresentazione di numeri e insiemi, i problemi di classificazione, le tipologie di relazione più significative (ordinamenti e equivalenze), la proporzionalità, le attività di tipo combinatorio, la manipolazione di formule, i primi esempi di funzioni, i grafici cartesiani, la costruzione di modelli. L' impressione non del tutto convincente che scaturisce da una giustapposizione forse priva di un forte principio organizzatore non vale a attenuare la positività della scelta di attribuire a questi strumenti un rilievo tale da individuarli – nelle indicazioni curricolari – come uno dei quattro nuclei tematici proposti.
Infine, ultimo tra i nuclei tematici, *i dati e le previsioni*. Qui la scommessa è quella di far entrare nella pratica didattica argomenti e attività poco frequentate; funzionale all' obiettivo è l' indicazione di contenuti essenziali e circoscritti. Quindi da una parte la valorizzazione delle tematiche della matematica dell' incerto, proposte con pari dignità delle altre; dall' altra un rassicurante – prima di tutto per gli insegnanti! – dimensionamento delle stesse, ricondotte a poche nozioni fondanti.
Il punto che emerge da tutto il documento - punto che va assunto come strategico nella riflessione sul curricolo nella scuola di base - è la scelta tra un approccio dotato di senso, in cui i modelli forti che si vengono costruendo sono costantemente sottoposti a un " controllo di significatività" , e le ragioni (pur importanti nella matematica,

ma che, proprio per questo, vanno assunte al momento giusto e con la necessaria consapevolezza da parte degli allievi) del " gioco formale" , gioco che si legittima, in qualche misura, " a prescindere" dai significati.
E per quanto riguarda la matematica nella scuola superiore? Qui il discorso è più complesso perché necessariamente articolato a seconda degli indirizzi; ma anche perché la riflessione su questo livello scolare appare molto più "acerba". E' però vero che molte delle osservazioni fatte, con particolare riguardo alla matematica nella scuola di base, conservano il loro valore anche "trasposte" alla scuola superiore.
Tenendo ben saldi due principi intorno a cui lavorare:
- Dal punto di vista dei contenuti, occorre mettere in discussione la preponderanza dell'asse algebrico-analitico, arricchendo l'approccio, senza però appesantirlo con la mera giustapposizione di nuovi contenuti a quelli tradizionali.
- Dal punto di vista della metodologia, è necessario affermare una maggiore continuità tra la scuola di base e la scuola superiore; la tradizione didattica contempla, nella scuola superiore, una matematica "offerta" in modo versativo (spiegazione del docente + esercizi). E' molto opportuno, invece, conservare elementi di costruttività e di laboratorialità all'insegnamento-apprendimento della matematica, anche nella scuola superiore.

Bibliografia

[1] Arpinati A.M, *Per un curricolo di matematica*, in Annali della Pubblica Istruzione, n.3-4/1999
[2] Robutti O. *Lavorare per nuclei fondanti e competenze: il caso della matematica*, in Annali della Pubblica Istruzione, n.1-2/2000
[3] Il Syllabus è prelevabile sul sito dell' UMI http://www.dm.unibo.it/~umi
[4] G.Spirito: *E se cominciassimo da un sogno?* in *Insegnare* n. 3 - 2001
[5] *Indirizzi per l' attuazione dei curricoli*, Roma, MPI, 2001

Biografia dell' autore

Docente di Matematica nella scuola superiore.
Impegnato nella formazione degli insegnanti di matematica da molti anni, è professore a contratto di Didattica della matematica presso la facoltà di Scienze della formazione primaria dell' Università Bicocca di Milano.
Collabora con l' Unione Matematica Italiana, la Società Italiana di Logica e il Cidi.
Scrive su riviste scientifiche e di didattica; cura per Insegnare, il mensile del Cidi, la rubrica Le città invisibili.
Autore di numerosi saggi, ha curato, tra gli altri, un manuale per le attività integrative e di recupero e libri di testo per la scuola secondaria di primo e secondo grado.