Spunti di riflessione sulla didattica della matematica a partire da un questionario - Numeri e figure

Giuliano Spirito, 2003

Nella puntata precedente abbiamo sviluppato alcune considerazioni a partire dai risultati di un questionario "atipico", predisposto proprio in funzione di una sorta di autocoscienza (di noi insegnanti) rispetto agli esiti del nostro lavoro nella scuola di base in ambito matematico. In quella occasione abbiamo dato conto di quanto emergeva dalla prima parte del questionario, quella centrata sul livello di controllo da parte degli allievi di alcuni concetti trasversali ai contenuti, quali le nozioni di definizione, dimostrazione, operazione, ecc.

La seconda parte del questionario - le cui risultanze sono l'oggetto di questo articolo - era invece mirata a gettare uno sguardo più ravvicinato su alcune problematiche relative a numeri e figure. Il tentativo era quello di evitare di introdurre normali quesiti aritmetici e geometrici, sia pure della tipologia quesiti "intelligenti", e quindi meno legati a abilità di tipo operativo e più attinenti, invece, alla comprensione profonda dei concetti (test di questo genere, anche della categoria "intelligenti", ne esistono in circolazione a sufficienza); avremmo voluto invece, anche in questo caso, piuttosto che misurare le competenze aritmetiche e geometriche, gettare luce sulla comprensione (o mancata comprensione) da parte degli allievi di alcuni nodi problematici che si collocano a monte delle loro difficoltà e fotografare le consapevolezze (e le mancanze di consapevolezza) che la nostra didattica induce rispetto al senso, agli strumenti, alle tecniche della matematica. Il tentativo - corre l'obbligo di dirlo per onestà intellettuale - appare riuscito solo in parte; ma, ciò nonostante, forse è possibile ricavare da esso qualche indicazione...

Vediamo dunque analiticamente quesiti e esiti relativi a questa seconda parte del questionario, ricordando che il test è stato somministrato a 56 tra alunne e alunni di due classi di primo liceo scientifico in una scuola del centro di Roma.

1 - NUMERI

a) N è il simbolo che indica l'insieme dei numeri naturali (cioè 0, 1, 2, 3, 4, 5, ecc.). Q è il simbolo che indica l'insieme dei numeri razionali (cioè, oltre ai numeri interi, anche i decimali limitati o periodici).

Per ciascuna delle seguenti affermazioni stabilisci se è vera sia in N che in Q, solo in N, solo in Q, né in N né in Q:

	in N e in Q	solo in N	solo in Q	né in N né in Q	non risponde
tra due numeri qualsiasi ce ne sono infiniti	20 (6)	1	17 (4)	16 (6)	2
il prodotto di due elementi dell'insieme è ancora un elemento dell'insieme	33 (10)	17 (5)	2	2	2 (1)
è un insieme ordinato	7 (2)	38 (10)	1 (1)	5 (1)	5 (2)
ogni elemento dell'insieme ha un immediato successivo	42 (14)	8 (1)	0	4 (1)	2
nell'insieme esiste un numero più grande di tutti	24 (8)	1	4	26 (7)	1
l'insieme ha sottoinsiemi infiniti	15 (5)	1	17 (6)	18 (4)	5 (1)

N.B - qui e nel seguito, tra parentesi sono le risposte del sottogruppo formato da alunne e alunni delle due classi con valutazione "ottimo" in uscita dalla scuola media (16 su 56)

N e Q sono gli insiemi numerici al cui interno lavorano i ragazzi nella scuola di base. Sarebbe dunque auspicabile che ne conoscessero alcune proprietà fondamentali, sia quelle comuni sia quelle relative a uno solo dei due insiemi. Purtroppo le cose non stanno così. In particolare, induce preoccupazione la considerazione dei risultati relativi alla prima e alla quarta domanda tra loro connesse. Dunque, la grande maggioranza degli allievi (42 su 56 e addirittura 14 dei 16 "ottimi") ritiene che esista l'immediato successivo sia in N che in Q, mentre solo un'esigua minoranza (17 su 56, che si riduce ulteriormente a 4 su 16 tra gli "ottimi") afferma che solo in Q tra due numeri qualsiasi ce ne sono infiniti. Se a queste risposte sconcertanti si aggiunge che solo pochissimi allievi (7 su 56) hanno chiaro che anche Q è un insieme ordinato e meno del 50% (26 su 56) ha chiaro che né in N né in Q esiste un elemento massimo, il quadro appare davvero fosco. E le risposte agli altri due quesiti non appaiono più confortanti: solo 33 su 56 sono consapevoli che N e Q sono insiemi chiusi rispetto alla moltiplicazione; e addirittura solo 15 su 56 ritengono che gli insiemi N e Q abbiano sottoinsiemi di cardinalità infinita.
Di nuovo, si pone a noi insegnanti un problema rilevante: è accettabile che il lavoro sui numeri, assolutamente centrale nella scuola di base e che fa riferimento appunto agli insiemi N e Q, produca questi esiti? Ovvero, detto in parole crude e esplicite: ha senso richiedere, in ambito numerico, prestazioni che presuppongono abilità di calcolo a un certo livello di complessità se non riusciamo a ottenere che i nostri ragazzi abbiano chiara consapevolezza delle caratteristiche fondanti degli ambienti numerici, N e Q, al cui interno chiediamo loro di operare (la discretezza di N contrapposta alla densità di Q; la presenza di un ordinamento sia in N che in Q, e, al tempo stesso, le differenze tra i due tipi di ordinamento; l'esistenza di sottoinsiemi infiniti, quali i pari in N o i numeri compresi tra 0 e 1 in Q)? Anche in questo caso, si potrebbe dire che la gerarchia degli obiettivi debba essere seriamente rivista: è probabilmente necessario porre al centro del progetto l'acquisizione di alcune consapevolezze, organizzando specifiche attività rivolte a questo obiettivo e, ebbene sì, è contestualmente necessario ridimensionare (giacché il tempo a nostra disposizione non è infinito) gli aspetti meramente calcolistici.
b) Due quantità si modificano; a volte avviene però che la loro differenza rimane uguale, altre volte avviene che il loro rapporto rimane uguale (è il caso della proporzionalità diretta).
In quali delle seguenti situazioni resta uguale la differenza, in quali il rapporto, in quali nessuno dei due?

	differenza uguale	rapporto uguale	né diff. né rapp. uguali	diff. e rapp. uguali	non risponde
età di due fratelli con il passare del tempo	43 (12)	6 (2)	1	6 (2)	0
altezza di due fratellini con il passare del tempo	2 (1)	6 (3)	47 (12)	0	1
velocità di due automobili durante un percorso	1 (1)	8	47 (15)	0	0
perimetro di due quadrati, uno con lato di 10 cm e uno con lato di 20 cm, raddoppiando, triplicando, ecc., la misura dei loro lati	10 (3)	37 (9)	6 (2)	3 (2)	0
numero di palline da ping-pong contenute in due scatole diverse aggiungendo lo stesso numero di palline a ogni scatola	32 (7)	13 (3)	7 (4)	4 (2)	0

Date due grandezze, la considerazione della loro differenza e del loro rapporto consente di effettuare due diversi tipi di confronto tra esse: nel primo caso un confronto mirante a stabilire quale delle due è maggiore e di quanto, nel secondo caso mirante a stabilire come "stanno tra loro" le due grandezze. Se le due grandezze evolvono nel tempo, la costanza della differenza testimonia di un processo in cui c'è accrescimento uniforme, la costanza del rapporto di un processo in cui c'è accrescimento proporzionale. Lo scopo della richiesta di esaminare le cinque situazioni sopra elencate era quello di controllare quanto di tutto questo sia presente, seppure in forma non del tutto consapevole, nel pensiero degli allievi. Gli esiti sono stati, a prima vista, abbastanza confortanti (o, almeno, meno sconfortanti del previsto): nei due casi di differenza costante (situazioni 1 e 5) la maggioranza ha fornito la risposta corretta (rispettivamente 43 su 56 nel primo caso e 32 su 56 nel secondo); nel caso di rapporto costante (situazione 4) 37 allievi hanno dato la risposta giusta; in entrambi i casi di differenza e rapporto variabili (situazioni 2 e 3) 47 alunni hanno "visto" la variabilità. Ciò non toglie che le percentuali di errore - davanti a domande piuttosto banali - non siano trascurabili (fino a un massimo, nella situazione relativa alle scatole di palline, di una percentuale che sfiora il 45% (che diventa superiore al 50% per gli alunni con "ottimo"!).
Dunque, fermo restando che chi scrive (che è poi anche l'autore del questionario, e dunque si può permettere, come già osservato, una certa severità!) ritiene questo blocco di quesiti non del tutto adeguato a mostrare i complessi nodi cognitivi relativi alle questioni indagate, si può comunque far discendere dagli esiti registrati qualche indicazione didattica: da una parte la necessità di evidenziare e esplicitare - non tanto a livello discorsivo quanto attraverso attività mirate allo scopo - sia la diversa qualità del confronto per differenza e del confronto per rapporto, sia il diverso significato che assumono la costanza nel tempo della differenza e del rapporto; dall'altra l'opportunità di far vivere in un contesto di questo tipo tutta la problematica della proporzionalità, tradizionalmente recepita con difficoltà dagli allievi.

2 - FIGURE

a) in un rettangolo di base b e altezza h, aumento la base della stessa misura di cui diminuisco l'altezza:
- il perimetro resta uguale, diminuisce, aumenta o la risposta dipende dalle misure iniziali b e h?

Spiega la tua risposta

Risposte: uguale 52, diminuisce 2; aumenta 2

b) in un rettangolo di base b e altezza h, aumento la base della stessa misura di cui diminuisco l'altezza:
- l'area resta uguale, diminuisce, aumenta o la risposta dipende dalle misure iniziali b e h?

Spiega la tua risposta

Risposte: uguale 9 (1), diminuisce 34 (11); aumenta 5 (2); dipende 8 (2) (di cui 2 sviluppano un'argomentazione più o meno corretta)

Il quesito a) ha un confortante esito plebiscitario. Decisamente più interessanti sono le risposte al quesito b). Ben 9 alunni (quasi il 20% del campione!) sposa una teoria "compensativa": se aumento una dimensione e diminuisco l'altra nella stessa misura, il bilancio complessivo non cambierà! 39 alunni prevedono una diminuzione o un aumento (rispettivamente 34 e 5); la sproporzione tra "diminuisti" e "aumentisti" scaturisce, probabilmente dal fatto che, da che mondo e mondo, i rettangoli hanno la base più lunga dell'altezza (sui libri, alla lavagna, nell'intera geometria scolastica) e dunque, avendo gli alunni preso in considerazione un

esempio di questo tipo, inesorabilmente sarà avvenuto che il nuovo rettangolo sarà risultato ancora più "schiacciato" (e quindi con area minore) di quello di partenza. Solo 8 alunni su 56 (e solo 2 su 16 con valutazione "ottimo") danno la risposta corretta (a parziale giustificazione si avvisa che in una delle due classi non era stato esplicitamente suggerito il caso "dipende": comunque, anche nella classe in cui questo caso era indicato nel testo del quesito, le risposte corrette sono state solo 6 su 28).
Se, anche in questo caso, non ci si vuole limitare alla registrazione e all'analisi dei dati, è possibile e forse utile lasciarsi andare a una suggestione. L'approccio tradizionale all'insegnamento della geometria - ancora in larga misura prevalente nella pratica didattica - privilegia decisamente il momento della descrizione delle singole figure e delle loro proprietà; ebbene, tale approccio appare piuttosto "asfittico" e probabilmente inadeguato a promuovere una sensibilità geometrica, intendendo con questa locuzione intuito geometrico, capacità di ragionare sulle figure, curiosità. Accanto a questioni del tipo "le cose stanno così" occorrerebbe lasciare ampio spazio alla geometria del "che succede se..."; e dunque sostituire alla rigidezza e all'immobilità delle figure, esaminate una per volta con il loro corredo di proprietà, il gusto di muoverle, manipolarle, deformarle, scoprendo per questa via analogie e differenze che le caratterizzano. Non è certo una novità (basti pensare alla lezione di Emma Castelnuovo e di Rosa Rinaldi Carini), ma forse è necessario ribadire, davanti a una prassi didattica che va in direzione opposta, la fecondità dell'approccio "dinamico" e costruttivo al mondo delle figure. Un quesito come questo, proposto all'interno di un'attività di tipo operativo-laboratoriale (e non solo *a posteriori*, per misurare sconsolatamente i limiti del lavoro che abbiamo sviluppato), può consentire di "scoprire" che il quadrato è il rettangolo con massima area a parità di perimetro, cioè di acquisire cognizione di una proprietà eminentemente geometrica; certo, forse il tempo "sacrificato" alla scoperta ci costringerà a fare qualche problema "geometrico" in meno tra quelli di cui sono pieni i nostri libri, in cui le figure sono spesso solo il pretesto per "applicare" l'aritmetica e l'algebra.

c) per ottenere un cubo che abbia metà del volume di un cubo dato, va bene dimezzare ciascun lato? Spiega perché
Risposte: sì 17 (2); no 36 (13) (di cui 20 (8) sviluppano un'argomentazione più o meno corretta); non risponde 3

La maggioranza (non schiacciante) degli alunni risponde bene, ma solo una minoranza, sia pure molto consistente, argomenta in modo più o meno corretto e convincente (è stata valutata come accettabile l'argomentazione basata sulla costruzione di esempi, oltreché quella, molto più rara, fondata su un ragionamento di carattere generale). Anche in questo caso gli allievi evidenziano, davanti a una questione piuttosto banale su cui in qualche momento è stata certamente richiamata la loro attenzione, una palese difficoltà. Certo, gioca la formulazione del tipo "che succede se...", evidentemente poco consueta; ma gioca anche un principio di carattere generale, che si può condensare in uno slogan: non basta "enunciare", occorre "far vivere". Ovvero, non è sufficiente comunicare agli allievi, *una tantum*, una considerazione, seppure sottolineandone l'importanza; occorre invece che gli alunni si confrontino direttamente, in prima persona, con i problemi, facendo esperienze sia concrete che mentali, conquistando quel tipo di "familiarità" che deriva da un'esposizione ripetuta alla questione. Altrimenti le acquisizioni sono inesorabilmente labili e insicure.

3 - TEMA: LE FRAZIONI (tutto quello che si può dire a proposito di frazioni)

Nelle risposte sono presenti:

definizioni in termini operativi	*19*
definizioni in termini di rapporto	*7*
definizioni in termini di divisione	*11*
definizioni in termini di numero	*7*
definizioni in termini descrittivi della "forma"	*24*
distinzione tra frazioni proprie e improprie (e apparenti)	*24*
frazioni e razionali	*2*
possibilità di semplificare	*2*
esempi di operazioni	*2*
frazioni complementari	*1*
non rispondono	*7*

L'idea del tema di matematica è, anch'essa, un piccolo debito alla "lezione" di Emma Castelnuovo; la scelta dell'argomento deriva semplicemente dalla centralità che le frazioni hanno - piaccia o non piaccia - nella prassi didattica.

Quasi tutti gli alunni cominciano il tema con una definizione in cui a volte coesistono due o più aspetti della nozione di frazione: si osservi, però, che l'aspetto più "gettonato" è quello meramente descrittivo: una frazione sono due numeri, uno sopra e uno sotto, divisi da una buffa linea orizzontale... Evidenziando un privilegio dell'aspetto formale che testimonia di un rapporto debole tra simbolo e significato; d'altra parte, nella denominazione dei due numeri coinvolti, quando specificata dagli allievi, il *numeratore* compare spesso come *nominatore*, mostrando un ulteriore scollamento, in questo caso tra nomi e significati: cosicché il nome del numero "di sopra" non è legato al significato di essere quello che *numera* (quante porzioni), contrapposto al nome del numero "di sotto", quello che *denomina* (di che tipo); più semplicemente è l'ennesimo nome complicato, intercambiabile con qualsiasi altro nome, e dunque sottoposto alla regola promozionale del "prendi due paghi uno" (imparo un nome, *nominatore*, e con una piccola variante, *denominatore*, ho imparato a indicare due oggetti). (Sì, chi scrive è pronto a riconoscerlo: con questa storia dei nomi l'abbiamo fatta un po' lunga. Però, sotto l'insistenza si nasconde un'opinione: stimolare una riflessione sui nomi degli oggetti matematici è parte essenziale dell'"educazione matematica"). Oltre a quello estrinseco-descrittivo sono presenti, negli elaborati degli studenti, gli altri aspetti canonici - più sostanziali - della nozione di frazione: frazione come operatore (19 allievi definiscono la frazione come l'insieme di azioni che consente di selezionare una parte da un tutto), frazione come numero (7 allievi fanno riferimento direttamente alla frazione come numero, mentre 11 alunni sottolineano il fatto che una frazione è una divisione tra due numeri e dunque la definiscono comunque in termini numerici), frazione come rapporto (evidentemente la dimensione più difficile, citata solo da 7 allievi). Nessun alunno indica contemporaneamente tutti e tre gli aspetti, come sarebbe giusto. Si osservi anche quanti pochi (solo 2 su 56) siano gli allievi che fanno riferimento alla possibilità di operare con le frazioni.

Se noi insegnanti avessimo sempre chiaro questo quadro, forse useremmo qualche cautela in più: rendendo netta la scansione logico-temporale dei tre momenti (frazione-operatore, frazione-numero, frazione-rapporto)

in cui si sostanzia il concetto di frazione, esplicitando la natura differente delle tre accezioni e, nel contempo, facendo sì che la scoperta di ciascuna di esse sia un arricchimento di quanto già acquisito, accordando una cura particolare al problematico concetto di rapporto.
Ma il dato più sorprendente dei temi degli alunni è un altro: in conseguenza della loro esposizione alla nostra didattica (giacché altra spiegazione non è data), avvertono l'insopprimibile urgenza di comunicare a noi e al mondo intero che le frazioni si distinguono in proprie e improprie (i più raffinati aggiungono le apparenti)! Qui, davvero, a chi scrive sembra che si imponga una severa, insopprimibile e urgente riflessione autocritica di tutti noi che insegniamo matematica...

4 - TEMA: I QUADRILATERI (tutto quello che si può dire sui quadrilateri)

Nelle risposte sono presenti:

definizioni in termini di 4 lati	*24*
definizioni in termini di 4 lati e 4 angoli	*21*
definizioni in termini di 4 lati e/o 4 angoli uguali	*5*
definizioni in altri termini	*2*
non definisce	*4*
elenco di quadrilateri senza specifiche	*18*
elenco di quadrilateri con proprietà dei vari quadrilateri	*21*
i quadrilateri hanno 2 diagonali	*6*
la somma degli angoli è 360°	*6*
distinzione tra quadrilateri regolari e irregolari	*10*
altre proprietà	*7*

Quasi tutti gli alunni (52 su 56) forniscono preliminarmente una definizione (in ambito geometrico sono più abituati a farlo). Non mancano le definizioni sbagliate (5); ma forse è più interessante sottolineare la presenza di definizioni ridondanti (24 alunni definiscono i quadrilateri come quelle figure con 4 lati e 4 angoli). Segue spesso una pura elencazione (18 alunni) o un'elencazione più ricca, in cui si cerca di evidenziare le proprietà fondamentali dei diversi quadrilateri; è però assente una classificazione organizzata. Infine, negli elaborati fanno la loro apparizione altre proprietà, caratteristiche di tutti i quadrilateri (6 citano l'esistenza di due diagonali, 6 il fatto che la somma degli angoli sia di 360°). Sconcertante è il fatto che ben 10 alunni introducano, a proposito dei quadrilateri, la distinzione tra regolari e irregolari (a volte attribuendo erroneamente la regolarità anche a altre figure oltreché ai quadrati); forse, come per le frazioni proprie e improprie, c'è un'insistenza perversa, da parte nostra, su classificazioni che, significative in dati momenti e in dati contesti, gli alunni "esportano" indebitamente e a cui finiscono per attribuire un rilievo esorbitante.
In generale, anche i temi di geometria risultano piuttosto poveri, statici (nessuno, ad esempio, fa cenno a trasformazioni e deformazioni che facciano passare da un tipo di quadrilatero a un altro), impacciati, fortemente imprecisi. Ci consegnano dunque un'immagine certamente impietosa degli esiti del nostro lavoro, spingendoci in direzione di un ripensamento radicale della didattica della geometria.

Poche parole finali, visto che notazioni (e provocazioni!) sono ampiamente disseminate nel corso dell'articolo. Le risposte degli alunni alla seconda parte del questionario sollecitano chi scrive (anche chi legge?) a interrogarsi sull'opportunità di rimettere in discussione le gerarchie che presiedono all'azione didattica a livello di scuola di base. Tali gerarchie privilegiano, in ambito aritmetico, l'attitudine classificatoria e la capacità di manipolare espressioni; in ambito geometrico, la precisione definitoria e il possesso di un repertorio di formule che consenta il calcolo di perimetri, aree e volumi; nel loro insieme sottendono un'idea della matematica al tempo stesso supponente (matematica come territorio del rigore sintattico e operativo) e riduttiva (matematica come luogo altro rispetto alla creatività, all'intuizione, alla costruzione "contrattata" del sapere). I risultati che otteniamo dagli alunni ci parlano, se vogliamo e sappiamo leggerli, di un successo molto parziale persino sul terreno prescelto; e, più in generale, ci mostrano conoscenze "locali" e incerte, poco consapevoli di sé e ancor meno utilizzabili nell'elaborazione successiva.

Esplicitare gerarchie di obiettivi diverse sembra dunque a questo punto necessario, non solo alla luce delle mancate consapevolezze indotte negli allievi (vedi puntata precedente), ma anche alla luce della più ravvicinata analisi, oggetto di questo articolo, sulla percezione e sull'immagine di numeri e figure elaborate dagli alunni. Così come sembra necessario sostanziare dal punto di vista didattico tali gerarchie alternative, tramutando opzioni di carattere generale in esperienze, materiali, vissuto quotidiano. Sapendo che il carico della qualità e dell'innovazione è, al momento, totalmente sulle spalle dei docenti: le indicazioni sulla matematica per la scuola di base partorite dal ministero (quelle per le superiori sono di là da venire), anziché disegnare un orizzonte, suggerire una prospettiva, stimolare una ricerca, si limitano a una sbiadita fotografia della parte più mediocre della prassi didattica. Dunque, cari colleghi, ci tocca "aiutarci da soli", in attesa di tempi migliori...