

LA PROBABILITÀ

Margherita D'Onofrio

Publicato sul n 36 di Rassegna, periodico dell'Istituto Pedagogico, agosto 2008

Perché

Le ragioni per introdurre la matematica dell'incerto nella scuola di base possono essere essenzialmente di due tipi: quelle relative al rapporto con la realtà e quelle di tipo metodologico.

- Ragioni attinenti al nostro rapporto con la realtà.

Nel mondo in cui viviamo gli eventi incerti sono molto più frequenti di quelli certi o impossibili. È in situazioni d'incertezza che si devono fare scelte e prendere decisioni, anzi senza gradi di libertà possiamo affermare che non c'è vera decisione. È importante che il ragazzo familiarizzi con l'idea che un avvenimento può essere possibile senza per questo essere certo, e che, inoltre, per prendere una decisione occorre sapere quanto il verificarsi di un evento sia "possibile" (probabile). In questo modo si può portare il ragazzo all'idea del più probabile, del meno probabile, per poi arrivare al concetto di equiprobabilità e della probabilità come misura del grado di fiducia in un evento. Da qui la necessità di sviluppare un modo di misurare questa incertezza che chiamiamo teoria della probabilità.

- Ragioni derivanti da considerazioni di tipo formativo e metodologico.

La matematica può dare un contributo significativo alla formazione complessiva di bambini e adolescenti. Questo avviene quando si pensa non solo alla matematica più strutturata, caratterizzata da verità assolute e da problemi a senso unico, ma soprattutto a quella più aperta, in cui i problemi fanno veramente discutere, mettono in gioco le capacità degli allievi, non hanno un unico procedimento per arrivare alla soluzione.

La pratica didattica è orientata più su una matematica addestrativa che formativa, privilegia più gli aspetti formali che semantici, attuando procedure deterministiche, caratterizzate da verità assolute e da problemi a senso unico con conseguente allontanamento dei giovani dallo studio matematico; ecco allora che fra gli insegnanti e quindi fra gli allievi predomina un atteggiamento fatalistico: solo chi ha il pallino della matematica può capirla.

La questione torna dunque ad essere: quali contenuti, quali metodi, quali percorsi, quali relazioni favoriscono meglio lo sviluppo di tutte le potenzialità insite nell'apprendimento della matematica?

La premessa alla matematica nelle attuali "Indicazioni per il curricolo" (pag.93) mette al centro la questione dei problemi:

Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate spesso alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola.

Un contributo in questo senso lo dà sicuramente la matematica dell'incerto, perché ricca di situazioni che permettono la discussione, mettono in moto capacità di ragionamento. Nei problemi scolastici non c'è una situazione effettivamente problematica che aiuti l'allievo a capire l'essenza del problema. Il contesto è solo un contenitore di dati.

Anche nei programmi del 1979 per la scuola media e del 1985 per la scuola elementare era presente il tema della probabilità, ma nella prassi è stato abbondantemente ignorato. Le motivazioni di tale trascuratezza sono da attribuire sia al fatto che gli insegnanti non padroneggiano questo tema, sia alla mancanza di coraggio nelle scelte: per dare spazio ad argomenti "nuovi" (nel senso che rinnovano il modo di fare matematica) bisogna togliere qualcosa di "vecchio" (nel senso di funzionale ad una concezione superata della scuola di base).

Come

Si può cominciare il percorso didattico esplorando le concezioni dei ragazzi sulla certezza, incertezza e probabilità con delle domande e dei problemi; l'intento è quello di porre delle questioni su cui discutere, non di risolverle, creando occasioni di confronto e soprattutto motivazione.

Scheda 1

1. Spiega che cosa significano per te le parole "possibile", "probabile", e in quale occasione si usano.
2. Carlo si trova in una camera da letto al buio, in cui c'è un cassetto con 5 calzini bianchi e 5 rossi. Deve prenderne due dello stesso colore: questo evento è certo, impossibile o possibile? Quanti calzini deve prendere Carlo per essere sicuro che tra quelli pescati ce ne siano almeno due dello stesso colore?
3. Estraendo a caso da un mazzo di carte napoletane, è più probabile che esca un asso o una carta di bastone?
4. Quante volte si deve lanciare una moneta per essere sicuri che esca almeno una volta testa?

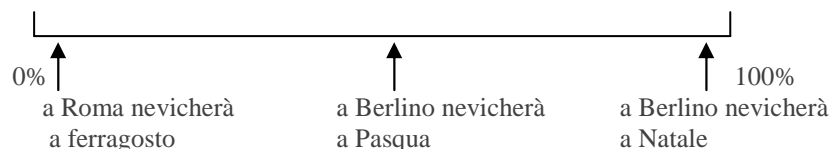
La prima domanda ha la funzione di una ricognizione su quello che i ragazzi intendono per probabile, possibile, per far emergere dalle risposte i concetti di "più probabile" e "meno probabile"; infatti l'uso matematico di questa parola è diverso da quello di tutti i giorni in quanto tende a quantificare la possibilità del verificarsi di un evento. Il secondo quesito fa riflettere sui due casi limite della probabilità: ciò che è certo e ciò che è impossibile; si passa poi con il terzo alla quantificazione di probabilità fino ad arrivare all'ultimo in cui si scopre la mancanza assoluta di certezze.

Gli interrogativi emersi dalla discussione collettiva non trovano in questa sede risposte definitive ma rappresentano solo l'inizio dell'itinerario didattico.

Eventi certi, impossibili, probabili

Per i ragazzi valutazioni binarie del tipo V/F, Si/No, certo/impossibile sono più facili di quelle con tutti i valori intermedi, per questo è importante che a fianco ad affermazioni del tipo V/F, si cominci con l'introdurre asserzioni valutabili con i tre "valori di verità" V/F/P, certo/impossibile/probabile. Successivamente si può passare a comparazioni di possibilità, con locuzioni del tipo: "più probabile, meno probabile" ottenendo così un ordinamento probabilistico degli eventi. Questo ordinamento può essere rappresentato in forma schematica su un segmento i cui estremi corrispondono ai casi dell'impossibilità e della certezza. Un evento può essere collocato su questo segmento in posizione diversa secondo la sua maggiore o minore probabilità.

Con questa serie di giudizi intermedi si arriva a una prima grossolana quantificazione della probabilità, per passare poi a delle quantificazioni più raffinate, esprimendo la propria valutazione del grado di fiducia in un evento con una scala di valori numerici più o meno precisi: p.es. da 0 a 10. Infine può risultare necessario passare all'uso di valori razionali tra 0 e 1 espressi sotto forma di percentuale.



Si tratta ora di riflettere sui modi in cui esprimere questa quantificazione. Dovendo scegliere situazioni reali a cui fare riferimento si può seguire il criterio di cominciare da quelle più regolari e trasparenti anche se più artificiali (per esempio i giochi), passando poi a situazioni più naturali ma che conservano una certa regolarità, per arrivare alle situazioni più comuni di eventi, anche

irripetibili, e più difficilmente analizzabili. In fondo questo percorso è simile allo sviluppo storico delle teorie in questo campo: dalla concezione classica a quella statistica, fino a quella soggettiva.

La definizione classica di probabilità

L'esperienza più comune in cui i ragazzi incontrano il caso è quella di molti giochi: come il lancio di monete, di dadi, l'estrazione di palline da urne, di carte da gioco. Tutte queste attività hanno in comune una situazione di partenza in cui i casi possibili sono resi (volutamente) equiprobabili mediante il mescolamento di certi oggetti (carte, palline, facce del dado). È in questa attività che si arriva spontaneamente alla concezione classica della probabilità di un evento come rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili.

In questo itinerario intendiamo partire da osservazioni su determinate esperienze, scoperte e discussioni, per arrivare a una costruzione critica e consapevole di definizioni e regole.

Per esempio, dopo aver fatto acquisire agli allievi un po' di esperienza sul gioco dei dadi si propone loro una scheda con le seguenti domande alle quali devono rispondere individualmente per poi affrontare la discussione collettiva.

Scheda 2

1) Nel lancio di un dado i ragazzi della 3 D hanno diverse aspettative:

- Anna spera che esca il numero 1
- Bruno aspetta un numero dispari
- Clelia scommette sulla comparsa di un numero minore di 3
- Dario punta sull'uscita del numero 6
- Elvira desidera l'uscita dell'1 o del 6
- Fabio aspetta un numero minore di 10

Secondo te chi ha più probabilità di vedere realizzato il proprio desiderio?

Chi ha meno probabilità di successo?

Ci sono ragazzi che hanno la stessa probabilità di riuscita?

Scrivi i tuoi ragionamenti.

Saresti capace di mettere i sei eventi in ordine di probabilità crescente?

In un lavoro del genere si possono scoprire o affinare concetti fondamentali quali: evento atteso, eventi possibili/impossibili/certi, eventi più probabili di altri, coppie di eventi equiprobabili, casi elementari.

2) Assegna un punteggio da 1 a 6 alla diversa possibilità di verificarsi degli eventi attesi dai 6 ragazzi dell'esercizio precedente.

Scheda 3

3) Giulio lanciando un dado spera che esca il 5, anche Ivan, giocando a tombola, spera che esca il 5, Iole giocando a carte (napoletane) spera che esca il 5 di denari.

a) Secondo te i nostri amici hanno la stessa probabilità di successo? Spiega il tuo ragionamento.

b) Se non è così, ordina i tre eventi dal più al meno probabile.

c) Puoi esprimere la probabilità di ognuno dei tre eventi con una frazione appropriata?

Con questa scheda si arriva a scoprire come la probabilità di un evento dipenda dall'universo di possibilità con cui si rapporta. In questo caso si è trattato di eventi elementari. Passando poi al caso di eventi composti (esce un numero pari, un numero minore di 5, ecc) si giungerà al caso più generale della definizione classica di probabilità come rapporto tra il numero di casi favorevoli sul numero di casi possibili.

Ciò che va sottolineato di questo approccio classico al concetto di probabilità è che esso si fonda sulla nozione di casi possibili intesi come eventi elementari equiprobabili ed esaustivi.

Questa concezione della probabilità è certamente la più semplice dal punto di vista aritmetico ma non può essere applicata alla maggior parte degli eventi aleatori (risultato di una prova sportiva, infortunio automobilistico, ecc.) per i quali non si hanno situazioni di partenza semplici come quelle descritte sopra (casi elementari equiprobabili).

Statistica e probabilità

Un secondo tipo di approccio è quello di situazioni che si ripetono molte volte secondo uno stesso schema. Per esempio: un giocatore che lancia tante volte lo stesso oggetto come una moneta, un dado; un atleta che salta in alto più volte, un concessionario che vende lo stesso tipo di automobile, ecc. In questi casi si può considerare la frequenza relativa di un certo evento: uscire testa per la moneta, far cadere l'asticella nel salto in alto, avere un certo guasto per l'automobile. Ci si può domandare che relazioni hanno le frequenze relative degli eventi suddetti con le rispettive probabilità.

Dal punto di vista didattico si possono configurare tre casi.

- 1) il caso in cui si conosce il modello classico della probabilità (per es. lancio di un dado), e si organizzano prove ripetute per calcolare la frequenza relativa dell'evento (es: lanciare un dado 30 volte e calcolare la frequenza relativa della faccia 4). Questo esperimento può essere fatto in classe da tutti gli allievi in modo da confrontare i risultati individuali ed eventualmente anche riunirli simulando un unico esperimento più grande. Dalla discussione dei risultati può emergere sia la variabilità delle frequenze relative, ma anche la convergenza dei valori alla probabilità suggerita dal modello teorico.
- 2) Il secondo caso è quello in cui si organizza un analogo esperimento di prove ripetute (es: lancio di una coppia di dadi considerando le somme dei punteggi comparsi) senza conoscere prima il modello basato sulla definizione classica. Si può rappresentare con un grafico la distribuzione delle frequenze emerse dall'esperimento. Quindi si cerca una spiegazione di quella distribuzione fondata sulla definizione classica.
- 3) Dopo aver chiarito con le esperienze precedenti la relazione che intercorre tra il concetto di frequenza relativa e quello di probabilità, si passa ad analizzare situazioni in cui non si può applicare la definizione classica di probabilità perché si tratta di eventi non riferibili a una base di eventi elementari (equiprobabili). In queste condizioni si può prendere come probabilità il valore verso cui le frequenze relative convergono. Per esempio si organizza un'indagine sperimentale all'interno della scuola sulla probabilità di "nascere nel mese di dicembre", rilevando la frequenza relativa di questo evento in tutte le singole classi e confrontando i risultati.

Si arriverà così a scoprire la legge dei grandi numeri, stabilendo il collegamento fondamentale tra il calcolo della probabilità e la statistica.

La probabilità soggettiva

Come comportarsi nei casi in cui non si può fare riferimento né a un modello di tipo classico (casi equiprobabili), né a un modello statistico di prove ripetute?

Questa situazione è molto più frequente di quanto si creda perché la maggior parte degli eventi che incontriamo nella nostra vita non sono né ripetibili, né basati su casi equiprobabili. Basta pensare ad eventi come: essere promossi, la vincita di un cavallo ad una corsa o di una squadra ad un campionato di calcio.

Scheda 4

Laura e Mara hanno deciso di fare una gara di nuoto. Chi arriverà per prima? Non lo sappiamo, ma sappiamo che Laura si è allenata durante tutto l'anno, mentre Mara non vede la piscina da due anni. I loro compagni di classe, Lorenzo e Luca hanno deciso di fare una scommessa. Si sono accordati così: Lorenzo scommette 5 € sulla vittoria di Laura e Luca 2 € sulla vittoria di Mara. Secondo te, senza le informazioni su Laura e Mara i nostri amici avrebbero scommesso allo stesso modo?

Se Lorenzo e Luca sono disposti a scambiarsi i ruoli, possiamo dire che la scommessa è equa? Qual è la probabilità di vittoria di Laura? e di Mara?

Volendo generalizzare il procedimento, possiamo dire che la probabilità di un certo evento è il rapporto tra la puntata su quell'evento e la somma di tutte le puntate.

Da questa attività si può costruire il concetto di scommessa equa, che essenzialmente si fonda sull'espressione del grado di fiducia (soggettiva) nel verificarsi dell'evento. La condizione della scambiabilità delle parti ha anche la funzione di depurare l'apprezzamento da fattori emotivi.

D'altra parte questa definizione è più generale delle altre in quanto potrebbe applicarsi a qualsiasi tipo di evento anche a quelli per i quali sono possibili altri approcci.

Bibliografia:

I. Casaglia, *Pensare e misurare l'incertezza. Un approccio narrativo a definizioni e punti di vista sulla probabilità*, in F. Cambi, M. Piscitelli, (a cura di) *Complessità e narrazione*, Armando editore, Roma, 2005

B. De Finetti, *Il "saper vedere" in matematica*, Loescher editore, TO, 1967

E. Lombardo, M. La Torre, *Matematica dell'incerto*, "La ricerca" Loescher editore, TO, 1987

G. Spirito, M. D'Onofrio, G. Petrini, *Il racconto della matematica*, La Nuova Italia Editrice, FI 2002