# PERCORSO PER INTRODURRE ALLA GEOMETRIA RAZIONALE GLI ALUNNI DEL BIENNIO DEGLI ISTITUTI TECNICI

*Maurizio Berni*

**Istituto d'Istruzione Superiore Santoni (sezione tecnico-agrario), 2007- 2008**

| *Descrizione essenziale dell'esperienza: le sue fasi, il suo "prima" e il suo "dopo" (suo inserimento in un percorso)* |
| --- |
| Il percorso è pensato per un istituto tecnico, in particolare nei corsi per geometri e periti agrari, dove gli studenti hanno una materia d'indirizzo come la topografia, che prevede la misurazione di terreni e ha come prerequisito una dose consistente di disegno tecnico, o la geopedologia. La struttura di tali discipline è più che altro focalizzata sugli aspetti pratici, piuttosto che su quelli teorici; il risultato è che i ragazzi non sanno argomentare ciò che fanno: non lo sanno descrivere, non sanno 'convincere' della bontà dei metodi utilizzati.<br>E' a partire da questa situazione che nasce l'idea che sia importante dare ai ragazzi l'opportunità di fare geometria piana nel senso euclideo, perché questa è una buona strada per sviluppare le capacità logiche; certo, è una strada che richiede impegno e fatica. A tale proposito, è ormai celebre una battuta di Euclide, tramandata da Proclo: a Tolomeo, che aveva chiesto se esistesse una strada più breve per imparare la geometria che non quella dello studio degli Elementi, Euclide rispose che non esiste una 'via regia' per la geometria. Ma questa fatica, nell'ottica di ottenere il risultato desiderato (quasi mai immediato), va motivata individuando una metodologia appropriata. Prima di tutto possiamo ipotizzare che le difficoltà che gli studenti incontrano non siano solo quelle per così dire 'intrinseche' alla disciplina, ma che ad esse si sovrappongano quelle che derivano dall'imposizione di un rigido e prematuro formalismo, senza la necessaria gradualità, e dalla presentazione di problemi che di fatto non sono veri problemi, come disegnare con una riga su un quaderno a quadretti: un contesto assai banalizzato in cui è impossibile inquadrare gli appassionanti problemi di costruibilità.<br>Il percorso si muove in una dimensione storico-narrativa, e inizia nel primo anno del corso di studi, con attività, basate su costruzioni geometriche, finalizzate a far acquisire la capacità di argomentare le affermazioni che accompagnano la loro descrizione; l'obiettivo di saper argomentare non è circoscritto alla sola geometria, ma è più generale, in quanto la competenza argomentativa è fondamentale nei più svariati contesti della vita reale e quindi nell'esercizio della cittadinanza. La competenza argomentativa, inoltre, è propedeutica alla comprensione e alla costruzione di una dimostrazione vera e propria, e quindi alla costruzione di un edificio ipotetico-deduttivo, come ci insegna la storia della scienza.<br><br>Le attività sono organizzate e si sviluppano a partire da un problema che gli studenti devono risolvere attraverso costruzioni geometriche.<br>Ma che tipo di problema e in che contesto?<br>Bisogna fare una considerazione prioritaria sul *prima* del percorso, cioè il bagaglio di conoscenze acquisite alla scuola media che sono utili, per esempio le proprietà e le definizioni di angolo, di poligono……; ma in questa esperienza, qualcosa, che va individuato e gestito opportunamente, può anche portare fuori strada rispetto alla geometria euclidea.<br>I ragazzi infatti che arrivano al biennio superiore coi loro quaderni a quadretti, e con le teste piene di formule e 'formule inverse', e di convinzioni su che cosa sia 'fare geometria', non possiedono la disposizione mentale per giungere spontaneamente alla progressiva spoliazione di cui necessitano i fondamenti della geometria euclidea. Avendo alle spalle anni di attività geometriche basate su calcoli (pur necessari!) di aree e volumi, tendono a ragionare sulle figure geometriche con una sovrastruttura, quella della "misura", riferendosi per di più ad unità codificate, come il metro: *questo atteggiamento costituisce un ostacolo serio alla comprensione della struttura razionale della geometria euclidea.*<br>Per *dare senso* a ciò che viene richiesto ai ragazzi e fornire loro un contesto di lavoro plausibile, *il problema iniziale è inserito in un contesto storico verosimile,* in cui devono usare uno strumento non convenzionale, una cordicella:<br>● per "tirare rette" (tenendola fissata per due estremi), cioè come 'riga' |

- per tracciare circonferenze (tenendola fissata per un solo estremo), cioè come come 'compasso'

Il disegno è sempre richiesto su un foglio di lavoro *bianco* (quindi non quadrettato), simulando l'attività degli *arpedonapti* egizi, i quali, come ci racconta Erodoto, ricostruivano con l'aiuto di corde i confini degli appezzamenti di terreno che venivano cancellati dalle piene del Nilo. La cordicella viene in seguito abbandonata e per motivi pratici (ma non teorici!) viene sostituita da una riga (non graduata) e da un compasso veri e propri.

Le costuzioni del disegno tecnico, attraverso l'uso di strumenti, cominciano ad avere, oltre all'aspetto pratico, una dimensione di sapere teorico 'racchiuso' negli strumenti stessi, che fa sì che ad ogni soluzione 'pratica' di un problema si possa affiancare una ben determinata soluzione 'teorica'.

Ovviamente, l'aspetto pratico (potremmo dire 'utilitaristico') del problema cade più facilmente sotto il dominio cognitivo degli studenti; ma c'è comunque da superare l’ostacolo (di natura pratica e anche teorica) che gli strumenti da adoperare *non sono esattamente* quelli propri del disegno tecnico. Per esempio nel disegno tecnico si passa ben presto all'uso delle squadre, mentre nella geometria euclidea la costruzione di angoli retti, o di rette parallele, avviene in modo più esplicito, con le corde, giustificata o con l'inverso del teorema di Pitagora applicato ad opportune terne pitagoriche (ad es. 3,4,5, metodo non utilizzato qui), oppure giustificata con mezzi più elementari, come i criteri di uguaglianza dei triangoli (si vedano nel seguito i dettagli).

E' chiaro che il passaggio al livello teorico costituisce il reale problema didattico. Questo passaggio, che non è scontato, può essere però favorito dalla interazione convergente di diversi elementi:

- L'esplicitazione dei modi 'consentiti' di utilizzo degli strumenti
- la descrizione del loro utilizzo secondo questi modi consentiti
- l'esplicitazione delle finalità, delle intenzionalità nel loro utilizzo
- la consapevolezza di aver raggiunto quanto si cercava
- lo sforzo di 'convincere' che si è davvero ottenuto quanto si cercava (da cui lo stimolo all'argomentazione)
- il confronto tra soluzioni diverse (ulteriore potente stimolo all'argomentazione, e alla scoperta della possibilità di coesistenza 'pacifica' di più soluzioni 'diverse'; raffinamento della percezione sulla 'diversità').

Tutto questo lavoro conduce alla conquista dei primi assiomi euclidei, a cui viene riconosciuto lo status di 'richieste necessarie' ('postulati', secondo il loro significato originario), e che sono 'in atto', cioè svolgono la loro funzione di strumenti per l'argomentazione, per 'convincere'.
In quest'ottica costruttiva, partendo da un problema la cui soluzione richiede il *teorema di Pitagora*, noto fin dalla scuola media, i contenuti che vengono poi sviluppati con una prospettiva di rigore sono quelli della *geometria assoluta* (quella che si può sviluppare senza il v postulato); essa riguarda soprattutto:

- il trasporto di segmenti e di angoli
- i criteri di uguaglianza dei triangoli
- le proprietà del rombo e del triangolo isoscele

Man mano che ci avvicina ad una presunta 'dimostrazione' del teorema di Pitagora, il V postulato diventa ineludibile.

E questo il percorso che secondo lo storico Zeuthen sembra il più plausibile anche nella storia della geometria[1]

---

1 “E' poi particolarmente suggestiva l'ipotesi dello Zeuthen, secondo la quale fu proprio il desiderio di giustificare e *dimostrare* il teorema di Pitagora che condusse i geometri greci a *costruire* un complesso di proposizioni concatenate l'una all'altra, risalendo fino a quelle più semplici (procedimento di *analisi*), sicché poi con procedimento inverso (di *sintesi*) da dette semplici proposizioni iniziali (postulati) si potesse *discendere*, pe gradi di

*conoscenze, abilità necessarie per la realizzazione dell'attività proposta.*

Una *abilità* che viene in genere sottovalutata, perché non di tipo strettamente disciplinare, è quella del *coordinamento oculo-manuale*, in cui i ragazzi mostrano carenze, probabilmente perché le esigenze della vita quotidiana, che prevedono l'utilizzo prolungato di mezzi digitali (computer, telefonino) portano ad una manualità molto settorializzata; si riducono le competenze nell'utilizzo 'fine' e coordinato di entrambe le mani per la manipolazione di strumenti 'analogici' come la riga e il compasso (l'errore da dominare, la diversa pressione della riga, o della matita, sul foglio, ecc.); si tratta di abilità che il docente intende promuovere e potenziare, restituendo ad esse il ruolo di esperienza utile ai fini del processo cognitivo.

Queste abilità sono infatti essenziali per il percorso, perché viene richiesto agli studenti di fare costruzioni geometriche, dapprima con una cordicella, per ricalcare il percorso storico; ma poi, apprezzando le difficoltà pratiche della cordicella come stimolo per superarle (è comunque necessario sempre un lavoro cooperativo, perché un ragazzo da solo non può fissare i due punti e poi .. ..disegnare il segmento[2]), si passa in maniera molto naturale a vedere riga e compasso come sostituti della cordicella (e non strumenti 'calati dall'alto', a priori). Ovviamente l'utilizzo corretto è solo quello equivalente alle cordicelle; in particolare la riga non deve essere graduata, perché deve sostituire unicamente la *corda tesa per due estremi*.

Le conoscenze da cui partire, come detto sopra, sono quelle della scuola media, come le principali "figure geometriche" e le proprietà che le caratterizzano; alcune di esse risultano utili per *non ricostruire tutto da capo* (del tipo "...ora dimenticate tutto perché si parte dagli assiomi..."), alcune per rimetterle in discussione. Per esempio qualche alunno immancabilmente dice che "una retta si definisce come un insieme di punti allineati"; bisogna arrivare a far comprendere che c'è qualcosa che non si può definire, e che va 'accettato' come ente o concetto primitivo. Comunque sia, piuttosto che sovrapporre definizioni diverse o anche concetti diversi ad enti già in qualche modo conosciuti, è fondamentale partire da ciò che i ragazzi sanno, in modo che l'apprendimento non risulti costituito da strati sovrapposti e poco comunicanti ('a cipolla'), ma come incessante adeguamento dell'intera struttura cognitiva alle nuove informazioni.

*obiettivi dell'attività, con particolare riferimento agli elementi di quantificazione, concettualizzazione, teorizzazione*

Gli obiettivi dal punto di vista operativo sono:

- organizzazione delle costruzioni in senso sequenziale (prima/dopo: quali costruzioni ne richiedono altre, quali altre, ecc.)
- individuazione degli 'elementi iniziali' di una costruzione
- modalità di interazione degli elementi iniziali nella dinamica della costruzione
- univocità o meno della costruzione, con dati elementi iniziali (es. costruire un rombo o un quadrato dato il lato)

Questa 'univocità' è un concetto dinamico, che si raffina via via: all'inizio per 'univocità' si intende certamente il fatto che

- \- univocità della costruzione , per esempio, se voglio costruire un rombo, posso partire dal lato, però sono infiniti i rombi che hanno quel lato, se invece voglio costruire un quadrato sarà unico a meno di qualcosa che all'inizio è molto implicito e poi in seguito

---

comlessità maggiore, fino al detto teorema di Pitagora. Sarebbe stato quindi proprio detto teorema (nella ricerca della sua giustificazione logica) a dare l'avvio alla geometria razionale. E la memorabile comunicazione di Zeuthen s'intitola appunto: *Théorème de Pytagore, origine de la géométrie scientifique (Congr. Internazionale, ginevra, 1904).*", afferma A. Frajese in "Gli Elementi di Euclide", ed. UTET, pag. 147.

2 E' comunque necessario sempre un lavoro cooperativo, perché un ragazzo da solo non può fissare i due punti e poi .. ..disegnare il segmento

diventerà quello che possiamo chiamare movimento rigido e che può portare ad un percorso sulle isometrie, che in questo percorso non vengono comunque sviluppate, ma che sorgono in modo naturale se dopo un certo periodo si utilizza anche il software dinamico, tipo Geogebra: il 'trasporto' senza le misure avviene essenzialmente per composizione di simmetrie.

-

Gli obiettivi concettuali emergono al termine delle singole costruzioni: infatti una volta completata una costruzione ogni studente deve osservarla e chiedersi se è sicuro di aver ottenuto proprio quello che cercava; in ogni caso viene sollecitato dall'insegnante, o anche dai compagni. Questo tipo di richiesta sollecita la costruzione di prime limitate catene logiche, argomentazioni più che ragionamenti codificati in maniera rigorosa, ma soprattutto la comprensione della necessità di tali argomentazioni.

Per giustificare i risultati ottenuti lo studente è portato a riconoscere che, come nella costruzione, anche nel ragionamento ci sono dei punti da cui bisogna partire, e occorre procedere con una certa sequenzialità; mentre sul piano operativo tale sequenzialità è cronologica, sul piano descrittivo/argomentativo, diventa a poco a poco una sequenzialità di tipo logico.
Qui lo studente deve esplicitare quali sono gli strumenti, ma anche le operazioni che può fare, operazioni che sul piano concettuale diventano i primi assiomi della geometria:

- per due punti posso costruire una e una sola retta;
- dati un punto e un segmento posso costruire una sola circonferenza, di centro assegnato e raggio assegnato;
- posso prolungare indefinitamente i segmenti da una parte e dall'altra.

Dal punto di vista concettuale l'insegnante non ritiene opportuno introdurre il quarto assioma, quello secondo cui tutti gli angoli retti sono uguali, perché molto raffinato e non adeguato al livello di sensibilità logica che intende perseguire in questo percorso; osserva che non compare praticamente in alcun libro di testo; cerca di farli lavorare con questi tre assiomi spingendo le costruzioni fin dove si può.

*individuazione dell'eventuale dimensione storica e/o epistemologica dei contenuti dell'attività proposta*

La dimensione storico-narrativa, scelta fatta dal docente nell'elaborazione del percorso, è immediatamente percepibile proprio a partire dal problema iniziale proposto, che rimanda ad un problema pratico, molto verosimile (si veda il paragrafo *descrizione analitica dell'attività*).

D'altra parte, anche se è importante presentare una situazione verosimile sotto l'aspetto storico, il percorso non vuole essere una ricerca storica, e quindi non vuole essere necessariamente fedele nei contenuti a ciò che è realmente accaduto; piuttosto di ciò che è realmente accaduto si recuperano aspetti e metodi, seguendo l'ipotesi di un parallelo tra ontogenesi e filogenesi.

Una fase cruciale del percorso è quella della costruzione di un quadrato, dato il lato, e della sua giustificazione: ci si imbatte nello stesso problema che storicamente ha incontrato Saccheri, il quale aveva aveva una costruzione[3], ma non riusciva a giustificarla completamente, in quanto non riusciva (giustamente) a *dimostrare* che i quattro angoli erano tutti retti[4]; tentando di cambiare le ipotesi, e quindi i processi costruttivi e dimostrativi, si giunge sempre ad un punto morto; questa *impasse* rende evidente la necessità di introdurre un nuovo assioma, quello delle parallele.

3 In realtà Saccheri lavorava su un presunto rettangolo (il "quadrilatero di Saccheri"), ma il problema, essendo circoscritto agli angoli, è equivalente a quello affrontato in classe)

4 Anzi, per la verità giunse a una dimostrazione falsa, sebbene istruttiva

| |
|---|
| *eventuale integrazione con applicazioni tecniche e tecnologiche* |
| Esiste un collegamento con le costruzioni che vengono effettuate nel corso di disegno tecnico, anche se presto le strade si divaricano, perché per motivi di praticità nel disegno tecnico vengono utilizzate la riga graduata e le squadrette per costruire angoli retti; tuttavia in entrambe c'è l'uso di righello, di compasso, c'è insomma una integrazione, un andare e venire, dal disegno alla matematica e viceversa.<br><br>Esiste una integrazione con le applicazioni tecnologiche attraverso l'utilizzo di un *sotfware* geometrico di tipo *free software* (Geogebra). Il *software* viene però utilizzato con molta prudenza e poco frequentemente, perché una volta finita la costruzione, se questa 'regge' alla prova del 'trascinamento' degli elementi iniziali, i ragazzi pensano (e non possiamo dar loro torto) che questa sia già una prova talmente forte da poter contare come una dimostrazione. Mentre da questo punto di vista l'uso del *software* può essere considerato anche fuorviante, esso si rivela invece utile per scoprire aspetti diversi, che non emergono dalle costruzioni con riga e compasso; per esempio mentre sul foglio bianco con il compasso aperto e la cordicella si possono trasportare segmenti con facilità, dentro il foglio di lavoro del *software* geometrico questo 'trasporto' non è possibile (a meno di attivare una opportuna 'macro', che è conveniente *non* attivare, proprio per lasciare l'opportunità di questa scoperta); quindi il trasporto di segmenti o di figure può essere fatto solo tramite opportune trasformazioni isometriche; è interessante notare come all'interno di esse si possano scegliere *esclusivamente* simmetrie assiali; tale circostanza mette in luce l'importanza di queste isometrie come *generatrici* di tutto il gruppo delle isometrie.<br><br>Alternativamente, può essere utilizzata la seconda proposizione del primo libro di Euclide, interessantissima dal punto di vista algoritmico[5]; in sostanza, il trasporto del segmento viene effettuato con la composizione di due rotazioni opportune, di centri diversi. Come è stato esplicitato da più parti, con questa proposizione Euclide dimostrava che la sua geometria non usava il compasso aperto, ma richiudibile; naturalmente è un fatto teorico, privo di una immediata ricaduta didattica, ma è interessante come riflessione per il docente il fatto che Euclide abbia sentito il bisogno di dimostrare un particolare così raffinato, e come questo particolare si apprezzi proprio usando il *software*. |
| *quanto e come viene sviluppato l'aspetto linguistico* |
| L'aspetto linguistico è molto presente e sviluppato nel percorso, sia nel confronto tra pari nei gruppi di lavoro, sia nelle sollecitazioni all'esposizione orale, sia infine nella richiesta di produzione di testi scritti che giustificano i risultati ottenuti descrivendo le costruzioni.<br><br>I ragazzi commentano, si interrogano e discutono fra loro ciò che torna o non torna nelle costruzioni proprie e degli altri (per favorire la visione ai compagni di quanto è stato fatto viene utilizato un foglio A3, appeso alla lavagna durante l'esposizione).<br>In ogni caso viene evitato che i ragazzi si sentano sotto processo e non c'è l'imposizione di un linguaggio rigoroso da parte del docente, che considera importante la discussione tra pari come elemento capace di far sorgere in modo naturale la necessità di raffinare il linguaggio, allo scopo di convincere i compagni, e non per essere giudicati.<br><br>Il docente, d'altra parte, sperimenta vari tipi di sollecitazioni ai singoli e ai gruppi, e osserva quali siano quelle che producono, o si avvicinano a produrre, un risultato atteso: un raffinamento del linguaggio, un'esigenza di comunicare, un cambiamento di opinione...<br><br>La necessità di "raccontare" come si è giunti ad un risultato potenzia il ruolo del linguaggio come strumento per esprimere le proprie intuizioni, e risolvere un problema di comunicazione; |

5 Si veda a tale proposito l'articolo di Godfried T. Toussaint, "A new look at Euclid's second proposition," *The Mathematical Intelligencer*, vol. 15, No. 3, 1993, pp. 12-23.

alcune definizioni nascono dalla necessità di eliminare “giri di parole”. Anche l’insegnante gioca il suo ruolo di mediatore e sollecitatore, pronto a “far finta di non capire” le istruzioni, finché vede che le rettifiche portano a miglioramenti nella qualità e univocità del messaggio; e, quando vi siano elementi di ambiguità non rilevati dagli alunni, tende ad interpretarle non nel modo in cui sono intese da chi le espone, ma in uno degli altri possibili modi coerenti ma diversi; e ciò con lo scopo di attivare ragionamenti che mettano in moto sequenze logiche, per ognuno dei ragazzi, secondo le proprie capacità del momento, che risultano comunque sollecitate.
Quasi tutti i ragazzi, dopo la costruzione, sono in grado di descrivere in modo analitico le istruzioni per riprodurla, pochi sono in genere quelli in grado di giustificarne i passaggi. Su questo terreno il cammino è difficile e richiede tempi lunghi.

*descrizione analitica dell'attività: le sue fasi, l'inserimento in un percorso, le competenze acquisite*

## Fase 1: I problema e una sua prima soluzione.

Il percorso inizia tenendo presente che :“Le testimonianze degli storici greci vogliono che la geometria (letteralmente: misura della terra) sia nata in Egitto. Dice Erodoto: <<Dicevano che questo re [Sesostri, ca. 2000 a. C.] distribuì il territorio fra tutti gli egiziani, dando a ciascuno un lotto uguale di forma quadrata, e che in base a questa suddivisione si procurava le entrate, avendo imposto il pagamento di un tributo annuo. Se da un podere il fiume asportava una qualche parte, il proprietario, recatosi presso il re, gli segnalava l'accaduto: egli allora mandava funzionari che osservavano e misuravano di quanto il terreno era divenuto più piccolo, affinché per l'avvenire il proprietario pagasse in proporzione il tributo. Io ritengo che in seguito a ciò sia stata inventata la geometria e sia poi passata in Grecia.>> Se poi il fiume aveva semplicemente cancellato i confini dei campi, era compito degli stessi funzionari ristabilire le giuste divisioni. Gli agrimensori egizi erano chiamati annodatori di funi. E tirando le funi essi tracciarono le due linee più semplici e più importanti della geometria: la retta e il cerchio. La prima, semplicemente tendendo una fune tra due punti, un'operazione di cui resta ancora un'immagine nelle espressioni "tirare una retta", "tirare una perpendicolare"; il secondo, facendo ruotare uno di questi attorno all'altro che rimane fisso.”

Si presenta quindi il problema iniziale, quello dell’eredità:

“Un contadino egiziano che ha un campo quadrato ne eredita un altro, sempre quadrato, molto lontano dal primo; vista la scomodità di coltivarli entrambi, vorrebbe cambiarli con un solo appezzamento di terreno, e quindi chiede l’intervento del funzionario del faraone (scriba) per aiutarlo a tracciare i confini di quell'unico campo, sempre di forma quadrata, la cui superficie sia equivalente a quella del campo posseduto e di quello ricevuto in eredità.

Il teorema di Pitagora, non ancora formalizzato, viene quindi posto all’inizio del percorso come strumento per comprendere e per motivare la geometria razionale.

Questa impostazione è alternativa, rispetto a quella 'tradizionale', che vede collocato questo teorema al secondo anno, in concomitanza con l’introduzione del concetto di grandezze omogenee e loro misura, quasi che fosse un punto di arrivo di una geometria razionale che gli alunni dovrebbero avere ormai compresa.

La collocazione precoce qui proposta rispetta il percorso storico della geometria: il teorema fu scoperto, e in qualche modo dimostrato, almeno due secoli prima della formalizzazione di Euclide; e, come è stato già osservato, secondo lo Zeuthen, fu proprio la necessità di dimostrare il teorema di Pitagora, non immediatamente evidente, a creare i presupposti della geometria razionale.

I ragazzi, confrontandosi tra loro, capiscono che il nuovo campo deve avere la stessa area della somma delle aree dei primi due, e alcuni intuiscono il legame col teorema di Pitagora.

Ma, una volta effettuato lo 'schizzo', l'idea, bisogna andare a ritroso e cominciare col porsi la domanda: “Ma come si costruisce 'bene' un quadrato?”

**Fase 2: le costruzioni.**

Si comincia col simulare la costruzione sul terreno con la costruzione su un foglio bianco, utilizzando delle vere cordicelle, mediante cui si costruiscono i lati dei due quadrati (con segni diversi sulla stessa cordicella, o con cordicelle diverse), ma ben presto risulta naturale la sostituzione delle cordicelle stesse con strumenti più semplici da usare: la riga e il compasso. La riga però, come sostituto della corda, viene usata nella sua versione euclidea, cioè come strumento per tirare righe dritte, e non per misurare, come si è già detto. L’uso euclideo del compasso, invece, che consiste nel richiudere lo strumento dopo ogni utilizzo, appare una raffinatezza, priva di una immediata ricaduta didattica, e viene ignorato, ma riemerge, come abbiamo visto sopra, quando viene usato il foglio di lavoro del software geometrico per il trasporto di segmenti.

All’inizio gli studenti trovano molte difficoltà nella costruzione del primo quadrato e dell’altro adiacente ad esso, poi essendo in tanti e lavorando in modo autonomo e poco direttivo, trovano molte soluzioni diverse; alcune errate, alcune corrette e fantasiose, altre corrette e un po’ complicate, e, con una certa frequenza, quelle che ci si aspetta: semplici e corrette.
Costruzioni diverse inducono ipotesi dieverse, e quindi diversi procedimenti dimostrativi; sono tanti teoremi diversi, tutti con la stessa tesi (dimostrare che vengono fuori quadrati), ma differenti nelle ipotesi e quindi nelle dimostrazioni.

Per costruire il quadrato un modo trovato è quello che passa per la costruzione della retta perpendicolare al lato del quadrato, quindi:
*Si traccia il segmento AB della lunghezza fissata* e si prende atto che i segmenti possono essere ‘trasportati’ [disegnare un segmento a partire da due estremi A e B è il I postulato di Euclide; trasportare segmenti è un 'postulato implicito', a questo livello]
*Si prolunga AB da una parte (p.es. B) di un segmento qualsiasi BC* e si comprende che i segmenti possono essere prolungati a piacere da entrambe le parti [questo risulterà essere il postulato II di Euclide]
***Si costruisce una circonferenza di centro B e raggio BC, che incontra il segmento AB in un*** *punto D;* si comprende che dati un punto e un segmento, è possibile tracciare la circonferenza che ha quel punto come centro e quel segmento come raggio [questo risulterà essere il postulato III di Euclide]
*Con apertura CD, puntando alternativamente su C e su D, si tracciano due circonferenze, che si incontrano in due punti E ed F: la retta EF è perpendicolare ad AB nel punto B.*

Il punto finale della costruzione, ormai convincente per tutti, è punto di partenza per molte domande a cui gli studenti non sanno dare risposta:
- Perché il punto B è allineato con E ed F?
- ...ma perché EF è proprio perpendicolare?
- Si potevano prendere aperture diverse del compasso o l’apertura CD è obbligata?

Per proseguire nella costruzione del quadrato dopo la costruzione della prima perpendicolare, qualcuno procede alla costruzione di una seconda perpendicolare: sulle due perpendicolari, dalla stessa parte rispetto al segmento AB, si riportano poi segmenti uguali al lato, e si uniscono i punti ottenuti: il quadrato è infine costruito.
Ma ora debbono porsi delle domande:
- perché quell’ultimo lato è uguale agli altri?
- perché gli angoli adiacenti all’ultimo lato costruito risultano anch’essi retti?
- ...e poi, perché le due perpendicolari al segmento AB sono parallele tra loro? Può darsi che si intersechino in qualche punto lontano?

Siamo così già arrivati al ‘limite’ della cosiddetta geometria assoluta, cioè di quella parte della geometria che non richiede l’uso del V postulato di Euclide: questo punto di confine è costituito dal teorema delle parallele, che si può formulare nel modo seguente:
due rette sono perpendicolari ad una stessa retta se e solo se sono parallele tra loro.

La cosa interessante è che con questa costruzione si torna ad una situazione storicamente avvenuta: quella del quadrilatero di Saccheri, quando cercò di dimostrare il quinto postulato.
In effetti abbiamo costruito un quadrilatero di Saccheri, cioè un quadrilatero costruito, a partire da un lato, con due lati perpendicolari e uguali costruiti sugli estremi del primo lato; possiamo dimostrare che gli altri due angoli sono uguali, ma si aprono tre possibilità su di essi:
- sono entrambi acuti (ipotesi dell’angolo acuto);
- sono entrambi retti (ipotesi dell’angolo retto);
- sono entrambi ottusi (ipotesi dell’angolo ottuso).
Saccheri ritenne di poter dimostrare che le ipotesi dell’angolo acuto e dell’angolo ottuso portavano ad un assurdo, e quindi di aver costruito un rettangolo; la sua dimostrazione era corretta nel caso dell’angolo ottuso, ma per quella dell’angolo acuto, non si accorse di avere scoperto una geometria non euclidea; infatti se i due angoli uguali sono acuti, viene fuori la

geometria iperbolica, se sono ottusi la geometria ellittica… con attività relativamente 'elementari' si possono rivivere esperienze di importanza cruciale, realmente avvenute nella storia della scienza. Questa sperimentazione in prima persona de nodi concettuali della geometria è cosa diversa dal 'raccontare' le geometrie non euclidee, che possono anche non essere citate in questo contesto.

Ma nella figura, già fatta, allegata al problema iniziale, non bisognava costruire un quadrato partendo solo da un lato, ma un quadrato a partire da un altro quadrato, in una posizione opportuna, con un vertice o con un lato in comune, per poter applicare il teorema di Pitagora in modo 'visivo' (senza calcoli); e qualcuno si accorge che la costruzione viene notevolmente semplificata: si può lavorare unicamente sui lati e non è necessario costruire gli angoli retti; neanche per il quadrato somma!

In questo caso l'ipotesi è che ci sono 4 lati uguali e che quindi siamo in presenza di un rombo; se però un angolo è retto, anche un secondo angolo è retto: infatti viene fuori un teorema secondo cui, dopo aver tracciato una diagonale e utilizzato il terzo criterio di uguaglianza, ci sono due triangoli uguali; quindi anche l'angolo opposto è retto; per i ragazzi è stato piuttosto strano scoprire che se si cambia la diagonale si continua a poter dimostrare che i due triangoli sono uguali ma non si sa se questi due angoli opposti sono retti (e si pone la necessità di arrivare al quinto postulato),

Altra costruzione ancora era quella di chi dice: "Riporto sui prolungamenti di due lati consecutivi del quadrato grande i due segmenti uguali al lato del quadrato piccolo, e poi mi preoccupo di tracciare le due perpendicolari, quindi vengono fuori tre angoli retti... e allora se questi angoli sono retti le due rette sono parallele, quindi tracciando un'altra trasversale per forza se un angolo è retto, anche questo è retto, se questo non fosse retto le rette si dovrebbero incontrare... non si riesce a dimostrarlo... va preso come assioma!

Se gli angoli non sono retti, si 'vede' (ma non si riesce a dimostrare), che le rette si incontrano dalla parte in cui c'è l'angolo acuto... si ottiene proprio il quinto postulato nella sua forma originaria: "se la somma dei due angoli che stanno dalla stessa parte [oggi diciamo *coniugati interni*] è minore di due retti, le rette si incontrano da quella parte"

Per inciso, una memorizzazione 'asettica' della formulazione originale del V postulato risulta talmente difficile e astrusa, da preferire, nella tradizione didattica, la formulazione ben più recente fornita nel 1795 da Playfair: "Da un punto si può tracciare un'unica parallela ad una retta data." I realtà la semplificazione è solo apparente, in quanto senza un'attività che dia un senso al tutto, le affermazioni 'semplici' sembrano piuttosto affermazioni banali e scontate.

**Fase 3: la geometria 'assoluta'.**

Si entra nel vivo del percorso, per arrivare al quinto postulato, con un percorso di scoperta e "dimostrazione" delle proprietà del rombo, che passa per un lavoro intenso sui triangoli; infatti per poter completare le argomentazioni devono essere affrontati i criteri di uguaglianza e le proprietà del triangolo isoscele, che si possono portare avanti in modo congiunto a quelle del rombo.

Anche qui la scansione tradizionale dell'esposizione della disciplina, secondo cui è bene dire tutto sui triangoli, pirma di passare allo studio del primo quadrilatero, non è condivisa.

In questa fase l'insegnante ha seguito una via diversa da quella che si basa sul confronto di triangoli che già 'esistono', ponendo ai ragazzi il problema di trovare quali siano le condizioni minimali che occorre avere per poter costruire un triangolo; cioè.

"Quanti e quali elementi occorre assegnare per poter costruire un 'certo' triangolo?"

Qui la locuzione "un certo triangolo" ha il significato, implicitamente accettato nel linguaggio comune, di una classe di triangoli congruenti.

Dalla discussione in classe (esiste il triangolo? E' unico? Come si disegna?) emergono

- i tre criteri di uguaglianza
- la disuguaglianza triangolare
- il fatto che la somma di due angoli non può superare l'angolo piatto

l'ordine tipico con cui i criteri emergono dalla discussione è generalmente diverso dall'ordine canonico dei tre criteri di uguaglianza, ed è generalmente il seguente:
- 3° criterio: costruzione di un triangolo dati tre lati assegnati; scoperta della disuguaglianza triangolare
- 1° criterio: tentativo di costruire un triangolo con un angolo e due lati assegnati; scoperta che se l'angolo non è quello compreso tra i due lati il triangolo da costruire potrebbe non essere unico
- 2° criterio: tentativo di costruire un triangolo con un lato e due angoli assegnati; scoperta che se il lato non è quello compreso tra i due angoli non si riesce a costruire il triangolo, ma non si può escludere che esista

Infatti per i ragazzi mentre è semplice trasportare i segmenti è complicato trasportare gli angoli; per trasportare un angolo la costruzione condivisa nella classe è quella per cui, dato un angolo, vi si costruisce un triangolo isoscele, fissando sui lati due punti equidistanti dal vertice, e si trasportano quindi i tre lati.

Quindi la terza fase del percorso rappresenta un salto di qualità, in cui occorre imparare anche ad esprimere i criteri di uguaglianza, viene proposta una mnemo- tecnica, abbastanza nota : LALALA, per ricordare i primi due criteri (LAL sta per lato-angolo-lato, con l'angolo 'compreso' tra i due lati; ALA sta per angolo-lato-angolo, con il lato 'compreso' tra i due angoli; il terzo criterio si ricorda facilmente).

Questa fase due risulta abbastanza discriminante, ma invece di rinunciare l'insegnante crede che valga la pena di insistere molto; quindi non vengono dati solo esercizi da fare in classe, ma anche dimostrazioni da ricostruire a casa in modo da ripercorre e consolidare quanto fatto e impadronirsi del linguaggio non come imitazione, ma come qualcosa che è stato costruito insieme e che si cerca di consolidare.

**fase 4: dalla geometria 'assoluta' a quella 'euclidea'**
Si arriva alla necessità del V postulato, perché non si riesce mai, anche se ci si gira intorno, a dimostrare che tutte le costruzioni della fase 2 raggiungono effettivamente lo scopo di individuare un quadrato; quindi, dopo un intenso percorso di geometria 'assoluta', si affrontano il teorema debole dell'angolo esterno, il teorema diretto delle parallele, il quinto postulato, nella forma originale *(vedi sopra individuazione dell'eventuale dimensione storica e/o epistemologica dei contenuti dell'attività proposta)* e il teorema inverso delle parallele.

*laboratori e risorse strumentali*

E' stato usato il laboratorio d'informatica lavorando con il *software* Geogebra. Come detto sopra, con questa applicazione non si può simulare il 'compasso moderno' nel riportare segmenti, ma occorre riportarsi alle simmetrie, oppure alla costruzione di una macro per il trasporto dei segmenti, che segua fedelmente le istruzioni operative della proposizione n. 2 del primo libro degli Elementi di Euclide; infatti una volta conclusa la doppia rotazione prevista dalla proposizione, a partire dagli oggetti iniziali, che sono il segmento dato e il punto esterno dato, gli elementi aggiunti per la costruzione (altri segmenti, archi di cerchio...) si possono nascondere e rimangono visibili soltanto il segmento iniziale e quello finale, trasportato nel punto assegnato.

*frequenza e durata nel tempo dell'attività;*

Le ore necessarie per questo percorso sono non meno di 25 concentrate in due-tre mesi senza sfilacciamenti, riprendendo però anche in momenti successivi gli argomenti svolti, per dare il tempo di esprimersi anche ai ragazzi che maturano più lentamente.
Comunque per la geometria l' impegno è stato del 50% delle ore di matematica, in quanto il percorso è stato collegato all'algebra, che veniva svolta in contemporanea, per esempio coi prodotti notevoli visualizzati geometricamente, e con le soluzioni geometriche delle equazioni di primo grado del tipo *cx=ab* (si veda l'attività proposta nel volume "Matematica 2003" dal titolo "L'algebra si sposa con la geometria").

*se l'attività è stata condotta da insegnanti di più discipline*

No, solo dall'insegnante di matematica; il collegamento con il disegno c'è stato anche se un po' faticoso per l'approccio alle costruzioni diverso. Interessante è stato invece il collegamento con la fisica: i ragazzi avevano il compito di disegnare coppie di vettori che formavano angoli di 60°, 30° e 45°; sono stati sollecitati a farlo attraverso la costruzione geometrica invece che con il goniometro; così l'angolo di 30° è stato costruito attraverso la bisettrice di quello di 60° e quello di 45° attraverso la costruzione del quadrato e la sua diagonale.

*se l'attività è stata chiarita nei suoi scopi agli studenti (contratto formativo)*

L'attività è stata chiarita per quanto possibile, nel senso che i ragazzi sapevano che avrebbero affrontato un percorso di geometria e che non avrebbero utilizzato il libro di testo. Sono state anche chiarite le difficoltà che avrebbero incontrato nel non usare la misura, ma mettendo in evidenza la contestualizzazione storica, e invitandoli a calarsi in questo contesto come in un gioco, queste difficoltà sono state comprese e gli studenti se ne sono fatti carico.

*strumenti e procedure per la verifica e la valutazione*

Vengono valorizzati gli interventi fatti in classe; viene riconosciuto agli studenti il fatto (vero) che molte delle idee sono venute da loro.

Ad eccezione di due o tre passaggi, come il primo 'puzzle' che 'dimostra' il teorema di Pitagora, e la situazione di Saccheri, che sono stati sollecitati dall'insegnante, le altre idee, procedimenti e scoperte sono degli alunni, tanto che il docente pensa di raccogliere un portfolio dei materiali prodotti, anche ai fini di una loro valutazione.

Gli strumenti per valutare sono diversi; per quanto possibile si cerca in ogni prestazione di 'isolare' singoli aspetti, in modo da evitare influenze in negativo degli uni sugli altri (difficoltà espositive in presenza di evidenti doti di intuizione geometrica; difficoltà di coordinamento oculo-manuale in presenza di un pensiero astratto che già presenta una buona strutturazione; incapacità di individuare ipotesi e tesi di un procedimento dimostrativo di una costruzione, ma descrizione precisa ed accurata della costruzione stessa,...).

Un rischio sempre presente in questo modo di lavorare è quello di non riuscire a garantire la corretta comprensione delle idee originali, che talvolta sono contorte (come è naturale che sia) e che andrebbero colte 'al volo'. Occorre fare in modo che questa circostanza influenzi poco la valutazione.

Nelle verifiche canoniche, meno della metà dei ragazzi riesce a produrre dimostrazioni complete; invece tutti sono riusciti nello spiegare in sequenza le costruzioni, sebbene talvolta con difficoltà espressive, anzi, malgrado quelle.
Tali verifiche sono costituire da esercizi simili a quelli già affrontati.

Al termine del primo periodo le abilità che vengono valutate sono

- saper costruire e il descrivere a parole il procedimento utilizzato
- cercare di esplicitare l'ipotesi e la tesi in dipendenza della costruzione scelta

- saper ri-costruire una dimostrazione completa
- saper costruire una propria dimostrazione

Per la valutazione finale, che viene graduata in modo analitico, sonoè previsti un livello di sufficienza minimo e uno massimo: massimo quando le dimostrazioni appaiono complete, intermedia quando l'alunno riesce ad esplicitare l'ipotesi e la tesi, minimo quando si riesce a riconoscere coppie di elementi uguali nella figura (in genere triangoli), e si riesce a pèrodurre qualche argomentazione corretta.

Il livello è insufficiente quando non appare alcun filo logico che conduce il discorso.

*strumenti e attività utilizzati per il consolidamento.*

Il consolidamento avviene attraverso i lavori di gruppo, per l'efficacia della relazione tra pari e anche perché il gruppo sa che spesso viene chiamato ad esporre il ragazzo più debole, quindi i componenti si impegnano ad aiutarlo, anche perché tutto il gruppo possa figurare bene; altro strumento utilizzato è il compito di ripetere, ricostruendole a casa, la costruzione e la spiegazione data dal gruppo.

*fattori strutturali organizzativi e materiali necessari (modificazione di calendario, flessibilità oraria, classi aperte, compresenza, ecc);*

Non esistono fattori strutturali e organizzativi particolari, il percorso viene svolto all'interno dell'orario curricolare; i materiali che vengono usati sia per la costruzione che per l'esposizione a tutti, sono i fogli A3, la riga non graduata e il compasso;

La compresenza non si è mai realizzata ma potrebbe essere utile quella con il docente di disegno.

*come l'esperienza è legata ad attività esterne ed esperienze di vita quotidiana;*

L'esperienza non è legata ad esperienze di vita quotidiana e neanche ad attività esterne come l'agrimensura, che è basata sulla misura più che sul confronto come previsto dal percorso.
Per puntare alla motivazione, dato che l'agrimensura è legata alla futura professione, le prime attività vengono presentate e vissute dai ragazzi come agrimensura portata su scala, sebbene siano attività che potrebbero anche essere effettuate fuori sul terreno; ma rimangono comunque differenze sostanziali tra il percorso e le attività esterne che i ragazzi svolgono basate sulla misura acquisita attraverso strumenti tecnologici.

*percorso formativo pregresso dell'insegnante (se influente rispetto alla attività in questione);*

Il docente è Supervisore presso la SSIS di Pisa, ha collaborato per anni con il nucleo di ricerca didattica della matematica, costituito presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Firenze, coordinato dalla prof.ssa Campedelli, e fa parte del GFMT, Gruppo di Formazione Matematica della Toscana.

Le riflessioni sull'insegnamento della geometria razionale risalgono al momento in cui fu varato il PNI, in cui forte era la critica sull'insegnamento tradizionale della matematica e molto sentita l'esigenza di rinnovamento e di modifica dei contenuti.
Da qui è nata l'esigenza di uno studio delle fonti che lo ha portato a chiedersi se non si stesse buttando via troppo, a causa di una scarsa conoscenza, e che, più che sui contenuti, le difficoltà nell'insegnamento della geometria razionale nascessero dalle modalità didattiche di presentazione dei contenuti stessi, in particolar modo da come venivano posti i problemi.
Ne *La teoria delle intelligenze multiple,* Howard Gardner sostiene che l'intelligenza, intesa come capacità di risolvere e porsi problemi *è fortemente condizionata nella sua efficacia dal contesto nel quale è chiamata in causa* e Bruner nel capitolo *"Le narrazioni nella scienza"* del suo libro "La Cultura dell'Educazione" sostiene che l'approccio *narrativo*, tipico di materie come la storia o

| |
|---|
| la letteratura, è estremamente importante anche nella scienza, e in particolare nella matematica perché in grado di attivare in modo naturale strutture di pensiero logico. Da qui la necessità di verificare se è vero che la geometria sia inadeguata sul piano dei contenuti, se sia effettivamente statica e non dinamica; da confronti con lo studio delle fonti ritiene che questa accusa di staticità sia non pertinente e sia invece presente nei libri di testo, che veicolano un metodo tradizionale consolidato caratterizzato da un inutile formalismo, e in cui la geometria di Euclide subisce una rivisitazione basata sugli assiomi di Hilbert. |
| *i motivi della scelta dell'attività;* |
| *Perché un percorso storico-narrativo di geometria euclidea?*<br><br>La geometria viene considerata la palestra per la costruzione del pensiero razionale e richiede un alto formalismo (in arrivo; non in partenza); ma questo approccio dà scarsissimi risultati sui grandi numeri. Mentre molte scuole scelgono di eliminare il problema alla radice, deliberando di eliminare la geometria razionale e attribuendo fiducia nella capacità di sviluppare il pensiero formale a materie "più attuali", quali ad esempio l'informatica, l'insegnante è convinto che proporre attività di geometria euclidea, sia una buona strada per sviluppare le capacità logiche, e che l'insuccesso della didattica, attribuibile alle modalità di insegnamento, non sia un motivo sufficiente per decidere di non fare geometria euclidea.<br><br>Da qui l'approccio storico narrativo, nella convinzione che la geometria "faccia bene" ai ragazzi, sviluppi le loro capacità logiche, anche se possono non arrivare agli obiettivi massimi nella capacità di dimostrare, saranno comunque stati sollecitati all'acquisizione e all'uso del linguaggio specifico della disciplina (nella descrizione dei passaggi costruttivi), e alla necessità e 'familiarità' nell'argomentare e comunicare razionalmente. |
| *individuazione di eventuali punti di "crisi" in itinere, sulla base dell'autovalutazione data dall'insegnante e modifiche apportate;* |
| Molti sono stati i momenti di crisi nella rivisitazione critica dei primi tentativi dell'approccio storico e costruttivo; il primo è stato proprio quello di capire la necessità di una ulteriore componente narrativa; poi un altro momento di crisi, non ancora superato, riguarda le modalità con cui introdurre i criteri di uguaglianza dei triangoli; essi possono apparire estranei al problema da cui si parte; è stata trovata una soluzione solo in parte soddisfacente, ma più coerente con il percorso, che si basa non sul confronto tra triangoli dati, ma sulla *ricerca dei criteri necessari* (nel senso di *condizioni necessarie e sufficienti*) per costruire triangoli *ex novo*. |
| *eventuali rapporti con gli Enti Locali, con strutture di ricerca e loro eventuale supporto all'attività descritta* |
| Per quanto riguarda i rapporti con gli Enti Locali, il percorso è inserito nelle attività (elaborazione, sperimentazione e verifica) previste nel Progetto per il Biennio, sostenuto dall'Assessorato alla Pubblica Istruzione della Provincia di Pisa a cui la Scuola e il docente hanno aderito.<br><br>Ci sono stati rapporti con il Cidi di Firenze fin dai primi anni 90, e la prima parte del percorso è stata esposta per la prima volta in un seminario fatto assieme alla prof. Leila d'Angelo, che attualmetne insegna presso il liceo scientifico Dini di Pisa.<br><br>Inoltre va tenuto particolarmente presente l'impulso ricevuto attraverso le attività del Nucleo di Ricerca Didattica della matematica della prof.ssa Campedelli, caratterizzate da una continua attenzione agli aspetti storici della matematica, e dalla necessità di consultare le fonti originali. |
| Autore griglia: Rosellina Bausani su informazioni e materiali forniti dal docente Berni |