



# LA COSTRUZIONE DEI NUMERI NATURALI

**NODI, ATTIVITÀ, MATERIALI**

Roma 12ott2016

*Margherita D'Onofrio*

# I numeri naturali



Nelle indicazioni nazionali 2012

*Numeri*

*Spazio e figure*

*Relazioni e funzioni*

*Dati e previsioni*

# I numeri naturali

Il tema “numeri” svolge un ruolo particolare, non tanto perché la matematica si esaurisce in questo tema, ma per il ruolo che la padronanza del calcolo e una certa sensibilità numerica ha nella visione che un individuo ha della propria ***abilità matematica***

## I numeri naturali

- A torto o a ragione, **il possesso di competenze numeriche** appare quindi essere **il perno** attorno al quale un individuo acquisisce **l'idea di essere o non essere "matematicamente competente"** o, con linguaggio più ingenuo e immediato, **"portato o meno per la matematica"**.

## I numeri naturali

Anche nella scuola l'aspetto numerico ha il sopravvento  
si parla di matematica e geometria

Nonostante ciò la sensibilità  
**(competenza)** numerica manca

Come mai?

# I numeri naturali

I numeri naturali sembrano i più semplici

Sono i primi numeri con cui il bambino viene in contatto

Vanno trattati con molta attenzione nella proposta didattica

## **Ma che cosa è il numero?**

Enciclopedia Italiana: troviamo una voce (scritta nel 1936), curata dal grande matematico Federigo Enriques, che presenta il concetto di numero **tracciandone la storia**

# I numeri naturali

**Rifacciamo la/le domanda/e**

come si è formato il concetto di numero **lungo la storia della civiltà**

(anzi, le storie delle civiltà), con tutte le sue generalizzazioni e innumerevoli applicazioni

nella **vita di ogni uomo** come si forma, si costruisce, o si scopre, il concetto di numero e attraverso quali tappe

# I numeri naturali

Le riflessioni prodotte

**in ambito  
matematico**

ricerche sui  
fondamenti  
dell'aritmetica e sulla  
individuazione di uno  
statuto per i numeri

in  
**etnografia,  
linguistica**

**in ambito psico-  
pedagogico**

studi sull'apprendimento  
che hanno spesso trovato  
nei numeri un oggetto  
privilegiato di  
osservazione.

**DIDATTICA DEL NUMERO**



# I numeri naturali

## **Il senso del numero**

facoltà che permette di accorgersi che qualcosa è cambiato in una collezione di oggetti

attributo posseduto dall'uomo e da pochissimi animali: alcuni uccelli, insetti

Il senso del numero non va oltre il numero 4

# I numeri naturali

I Boscimani non hanno nomi per indicare i numeri ma solo uno, due, molti

Il fatto che "più di due è uguale a una moltitudine" sia stato uno stadio comune nell'evoluzione culturale delle popolazioni umane è testimoniato anche dalle sue tracce nelle lingue odierne

francese	<i>troi</i> (tre)	<i>très</i> (molti)
Latino:	<i>ter</i> (tre volte)	anche <i>pluralità</i>
Inglese:	<i>thrice</i> (tre volte)	anche <i>molti</i>
Varie lingue	<i>troppo</i> o <i>truppa</i>	<i>tre</i>

nei geroglifici egiziani



"Uno scarabeo"



"Scarabei"



# I numeri naturali

Lingue primitive che hanno vocaboli per distinguere ognuno dei colori **dell'arcobaleno** ma non hanno l'equivalente della parola **colore**. E ve ne sono altre che hanno i nomi dei singoli numeri e **non per la parola numero**.

Una tribù della Columbia britannica:  
possiede 7 gruppi distinti di nomi per indicare i numeri:  
**uno per gli oggetti rotondi e per il tempo, uno per contare gli uomini, uno per gli oggetti lunghi e gli alberi, uno per le canoe, uno per le misure, uno per oggetto ben determinati.**

# I numeri naturali

L'uomo non avrebbe progredito nell'arte del calcolo se si fosse fermato a questa percezione.

Attraverso circostanze favorevoli ha imparato ad aiutare la sua limitatissima percezione del numero con un artificio destinato ad esercitare un'influenza enorme sulla vita futura: **il contare**

“L'atto del contare trasformò la nozione concreta, e perciò eterogenea, di pluralità, così caratteristica dell'uomo primitivo, nel concetto omogeneo e astratto di numero che rese possibile la matematica”

Tobias Dantzing, *IL NUMERO linguaggio della scienza*, La nuova Italia

# I numeri naturali

In realtà quello che si può supporre è che in effetti ben prima del concetto di numero, l'umanità abbia elaborato la "capacità di conteggio";

Possiamo sapere se oggi ci sono assenti in classe, senza contare e senza fare l'appello?

Come può ad esempio un pastore, totalmente analfabeta in aritmetica, controllare che il suo gregge di 40 pecore è tornato intatto all'ovile dal pascolo?

Abbiamo applicato un procedimento che domina tutta la matematica e che è noto come **corrispondenza biunivoca**

Uno strano reperto archeologico preistorico, frequente in quasi tutto il mondo, è l'**osso intagliato**: è un osso di animale su cui una mano umana ha segnato delle tacche.

Il reperto più antico è forse l'**osso di lebombo**, circa del 35000 a.C.

Uno dei reperti più famosi è l'**osso di Ishango**.

È un reperto datato tra il 20.000 a.C. e il 18.000 a.C. Si tratta del perone di un babuino di colore scuro, con una scaglia tagliente di quarzo innestata a una estremità, probabilmente utilizzata per incidere

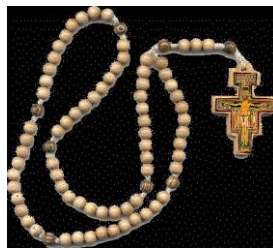


Nella figura a fianco un osso di renna intagliato risalente circa al 15.000 a.C.

*Devono esserci voluti secoli e secoli, per scoprire che una coppia di fagiani e un paio di giorni sono entrambi esempi del numero due*  
Bertrand Russell

L'osso è uno strumento molto comune, ma c'è chi usa **insiemi di sassolini, conchiglie, bastoncini**, persino escrementi secchi: i racconti dei primi viaggiatori venuti a contatto con popolazioni "primitive" abbondano di osservazioni di questo genere.

Un altro esempio è costituito dai rituali religiosi, il fedele non ha bisogno di saper contare se è munito di uno strumento adatto: un **rosario**



All'origine stessa dei tentativi di conteggio fatti dall'uomo, nella sua evoluzione culturale, c'è l'idea di **corrispondenza biunivoca**

# I numeri naturali

a questo stadio

**non c'è il concetto astratto di numero**

**non ci sono *le parole* per indicare i singoli numeri**

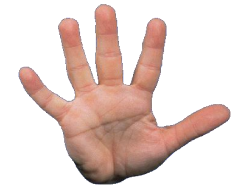
**né tanto meno un sistema articolato di simboli per essi**

**c'è solo la pratica del mettere in corrispondenza  
biunivoca due insiemi**



# I numeri naturali

ma



Nella corrispondenza biunivoca fra pecore e tacche su un bastone, non si costituisce solo una relazione fra insiemi;

le **tacche** vengono infatti usate come **simboli**: esse "stanno per" qualcos'altro (le pecore). Ci sono quindi degli oggetti (tacche, sassi, conchiglie) che assumono un valore astratto, che vengono considerate non per se stessi, ma come simbolo per qualcos'altro;

è questo un passo decisivo nell'evoluzione culturale umana, il passo che potrà portare sia alla nascita **del sistema dei numeri**, che anche **alla scrittura**, con l'invenzione di simboli che "stiano per" le parole o i suoni della lingua parlata

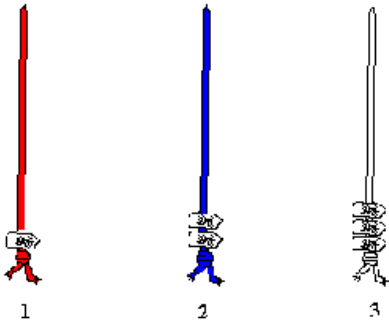
# I numeri naturali

Come fare a rappresentare quantità elevate?

Avere un solo simbolo per ogni unità rende il tutto piuttosto ingombrante: per un gregge di 100 o più pecore diventa un po' difficile procedere con centinaia di sassi o tacche su bastoni.

Il bisogno di un metodo più efficiente si presenta presto

La soluzione che supera questo problema è quella di usare più simboli, con *valori diversi*



È ancora in uso presso alcune tribù dell'Africa Occidentale contare le loro mandrie infilando conchiglie forate in cordicelle di diverso colore: quelle nella cordicella **bianca** rappresentano *un'unità* **azzurra** rappresentano *dieci capi di bestiame* **rossa** rappresentano *cento capi di bestiame*

## gran passo concettuale

non si fa più solo una corrispondenza biunivoca fra "oggetti da contare" e "oggetti simbolo";

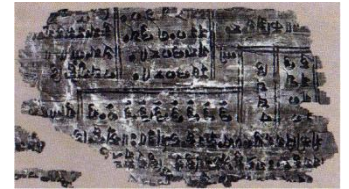
**i simboli acquistano valori diversi** (in questo caso a seconda del colore della cordicella, in altri a seconda della forma, o della posizione), e questo è un passo notevole verso la padronanza simbolica del numero.

# Il sistema di numerazione posizionale

I primi esempi noti di una scrittura numerica che sia basata sui seguenti elementi:

- notazione posizionale,
- base dieci,
- presenza dello zero,
- nove simboli (cifre) oltre lo zero,

risalgono al V secolo d.C. (nel trattato indiano di cosmologia *Lokavibhaga*, 485 d.C.);



Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (morto dopo l'846) scrisse il **primo testo in lingua araba** presentando la numerazione indiana posizionale nel IX secolo (dal suo nome deriva la parola "algoritmo").

# Il sistema di numerazione posizionale

Nel 1202 e 1228 il matematico pisano Leonardo **Fibonacci** (che aveva viaggiato molto fra gli arabi) scrisse il *Liber Abaci*, che illustra il sistema posizionale, che fu il testo che più contribuì alla sua introduzione sistematica in Europa



L'uso efficiente del nuovo sistema di numerazione richiede una novità: **avere una cifra per il numero zero.**

All'inizio solo simboli (« e ■) per indicare assenza della cifra in quella posizione, poi si è evoluto divenendo una cifra, "0", e un numero vero e proprio

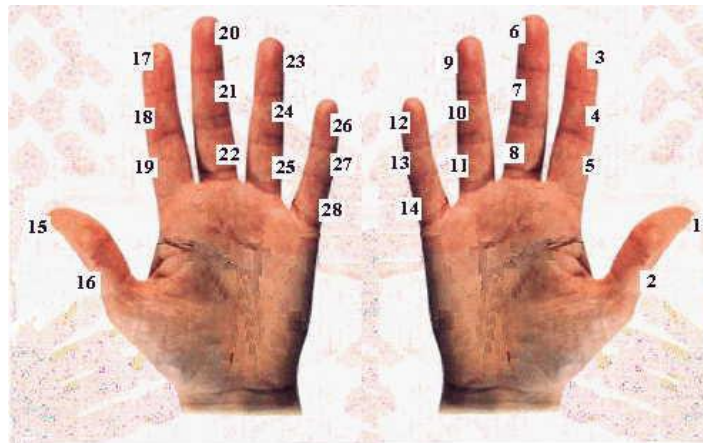
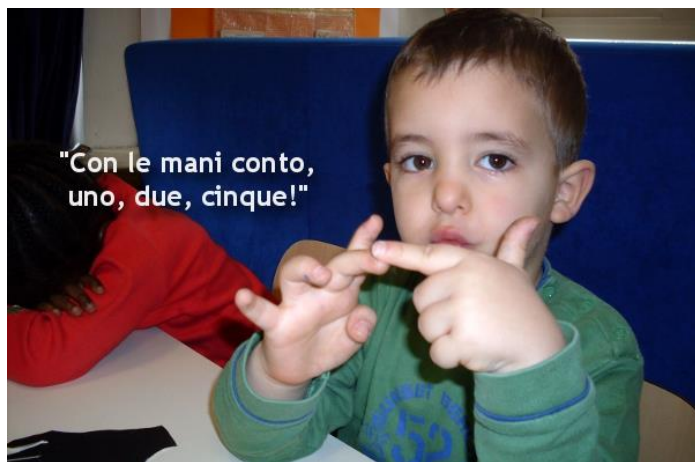
La diffusione del nuovo sistema in Europa fu abbastanza lenta e all'inizio osteggiata

# Grandi protagonisti: le mani

I metodi di calcolo si sono sviluppati parallelamente ai metodi di rappresentazione numerica

Il primo strumento di calcolo è stato senza dubbio il nostro corpo, e soprattutto le mani;









dal conteggio elementare sulle dita si è passati a metodi più sviluppati



# le mani articolabili

## artefici dell'evoluzione del numero

La mano è uno strumento che consente all'uomo di passare, inconsapevolmente dal numero cardinale al numero ordinale.

	1	2	3	4	...
PRINCIPIO CARDINALE					...
PRINCIPIO ORDINALE					...

**Modello cardinale**

**Modello ordinale**

In sanscrito pantcha (cinque)

In persiano pentcha (mano)

Studi su popolazioni primitive hanno confermato questi risultati:

**popolazioni che non sono ancora arrivati a contare con le mani sono quasi privi di qualsiasi percezione del numero**

# I numeri naturali

Per contare non basta una collezione eterogenea di modelli, questi **devono essere disposti in una successione ordinata**, una successione che procede in senso crescente, la cosiddetta successione naturale

**uno, due, tre, ...**

**Contare** un insieme significa **assegnare** ad **ogni elemento** di esso **un termine della successione naturale**, ordinatamente, finché l'insieme è esaurito.

Si dice **numero ordinale** il termine della successione naturale che viene assegnato all'ultimo elemento dell'insieme

Tale sistema esiste quando i primi, pochi **vocaboli** che distinguono i numeri siano stati imparati a memoria nella loro successione ordinata e sia stato escogitato un sistema fonetico per passare da qualsiasi numero, al successivo.



## I numeri naturali

Noi siamo abituati a passare continuamente dal numero cardinale al numero ordinale tanto che questo duplice aspetto ci appare unico.

Se non fossimo stati capaci di mettere i **numeri in una successione** non avremmo avuto il calcolo

# I numeri naturali

## le caramelle

Se ora prendiamo in considerazione un bambino **di tre-quattro anni** e, di fronte a due o tre caramelle, gli chiediamo quante siano, probabilmente risponde in modo corretto, a colpo d'occhio, senza bisogno di contarle.

Lo stesso bambino mostrerà di sapere "recitare", come fosse una filastrocca, i nomi dei numeri nel loro ordine giusto, fino al cinque ed oltre.



# I numeri naturali

## le caramelle



Ma lo stesso bambino, se gli verrà chiesto di contare le tre caramelle già considerate, non necessariamente sarà in grado di compiere l'operazione in modo corretto.

Il **bambino** si trova in una situazione paragonabile a quell'ipotetico momento della preistoria che è poi sfociato nell'uso **dell'osso intagliato**

# I numeri naturali

Esperienze di vario tipo mettono in luce che è **tra i cinque e i sei anni** che il bambino inizia ad esplicitare:

- la nozione di **conservazione della quantità** di un insieme come una proprietà **indipendente dalle forme** attraverso cui un insieme o un oggetto si presenta e viene percepito (ad esempio, la forma del recipiente, o la disposizione degli oggetti).
- il **concetto di numero** come misura della quantità degli oggetti di un insieme o della posizione di un oggetto in una sequenza ordinata (come "proprietà intrinseca" dell'insieme o dell'oggetto nella sequenza).

A più di cinquant'anni dalla pubblicazione dell'opera fondamentale di Jean Piaget e Alina Szeminska ciò che sappiamo di sicuro è che il cammino verso il numero è molto più complesso e ricco di problemi di quanto non si pensasse allora.

# I numeri naturali

Le esperienze di Piaget mostrano che solo verso i 7 anni si può dare per scontato che i bambini abbiano in maggioranza acquisito l'invarianza della quantità e sappiano usare a proposito i numeri, nel loro aspetto ordinale e cardinale.

L'età intorno ai sei anni è quindi critica ai fini di questa acquisizione; a quest'età i bambini si trovano in un'area di "**sviluppo prossimale**", ed è per questo che proprio il concetto di numero ha un ruolo centrale nella **continuità** da costruire tra la scuola dell'infanzia e la scuola elementare.


La ZSP è definita come la distanza tra il livello di sviluppo attuale e il livello di sviluppo potenziale, che può essere raggiunto con l'aiuto di altre persone, che siano adulti o dei pari con un livello di competenza maggiore

[Lev Vygotskij](#)

# I numeri naturali

La prospettiva storica e quella ontogenetica ci hanno mostrato **che i numeri naturali** nascono da quell'attività **mentale** primitiva che corrisponde al **contare**, allo scopo di misurare la quantità di elementi di un insieme discreto di oggetti,  
o la posizione in cui un dato elemento è collocato in una serie.

A questo punto **occorre andare ancora oltre** nel processo di astrazione che conduce alla comprensione del concetto di numero in quanto concetto "matematico"



Non ha tanto senso considerare ogni singolo numero come a sé stante, ma trattare tutti i numeri nel loro complesso, considerare cioè il **sistema dei numeri naturali**, su cui poter agire con operazioni (mentali, non più solo percettive) di confronto, di addizione, etc....

spogliato del riferimento concreto e fenomenologico, ciascun numero vive grazie alla **struttura** che lo mette in relazione con ogni altro numero

# I numeri naturali

- I matematici sono arrivati molto tardi a **formalizzare** i numeri naturali. Solo alla fine del'800, infatti, ci si è posti il problema dei "**fondamenti della matematica**"
- Due formalizzazioni sono state proposte da **Georg Cantor** e **Giuseppe Peano**. Si tratta di due diversi modelli che si fondano l'uno sulla **cardinalità**, l'altro sull'**ordinalità**.



# I numeri naturali

Non solo **cardinalità** e **ordinalità**

Ma i diversi tentativi di dare uno statuto ai numeri naturali, condotti tra ottocento e novecento, hanno consentito di acquisire consapevolezza di un ulteriore aspetto che si è rivelato centrale, non solo in matematica, ma anche nella moderna scienza dei calcolatori: **l'aspetto ricorsivo**

per poter *costruire* il sistema dei numeri naturali si ha bisogno di un *punto di partenza*, lo zero, e di un procedimento, che può essere ripetuto indefinitamente, il *passaggio al successivo*, che deve soddisfare alcune regole

In una prospettiva più generale, **l'aspetto ricorsivo** offre una ulteriore opportunità: quella di incontrare per la prima volta **l'infinito**. Se infatti le attività di ordinare e di contare si rivolgono sempre, nelle esperienze concrete, ad insiemi finiti di oggetti, la regola di ricorrenza non ha limiti nel produrre "nuovi" numeri.

# I numeri naturali

**Il numero cardinale** esprime l'equivalenza di insiemi aventi lo stesso numero di elementi

**Il numero ordinale** come etichetta per assegnare un ordine di priorità ad aggregati di cui si voglia stabilire qual è il primo elemento, quale il secondo, ...

**Il numero codice:** numero di telefono, numero della patente, numero civico, ....

Il nostro posto in ogni attività sociale, è individuata da un numero

codice fiscale

A B C D E F 5 0 m 1 4 H 5 0 1 Q

# I numeri naturali

## la didattica

Guardando alle proposte sull'insegnamento aritmetico che sono più diffuse nella scuola

- 1) molto spesso le attività didattiche sul numero, dopo i primi passi, sono svolte in ambiti **poco significativi per i bambini**, con un taglio definitorio e normativo;
- 2) **non c'è continuità nel passaggio dalla manipolazione e dalle attività concrete** al livello formalizzato, di modo che l'insegnamento matematico si identifica subito come una *imposizione* di astrazione piuttosto che come una *educazione* all'astrazione;
- 3) **le attività didattiche si concentrano** su un repertorio limitato di contesti, privilegiando in modo quasi esclusivo l'aspetto **della cardinalità**;
- 4) **alcune delle proposte di percorsi educativi** che invece tengono conto della complessità concettuale del numero, sono però caratterizzati, talvolta in modo dichiarato, da una impostazione *eclettica*, nella quale le diverse tipologie di attività, legate ai diversi aspetti del numero, **si affiancano senza una chiara identificazione di un percorso di costruzione progressiva dei concetti**

# I numeri naturali

Le seguenti cose sono molto diverse:

- **saper contare**, cioè avere la capacità di riconoscere e operare sulle quantità (discrete), con particolare riguardo alla **invarianza** del numero degli oggetti di un insieme rispetto alle disposizioni, suddivisioni ecc. di tali oggetti;
- **conoscere i nomi dei numeri**, sotto forma di filastrocca, eventualmente abbinata alla capacità di "fare la conta", in modo meccanico, di una sequenza di oggetti di un insieme ordinato;
- **conoscere i simboli dei numeri**, riconoscerli sul telecomando del televisore, sull'orologio, sulla facciata delle case .....



**GRAZIE**