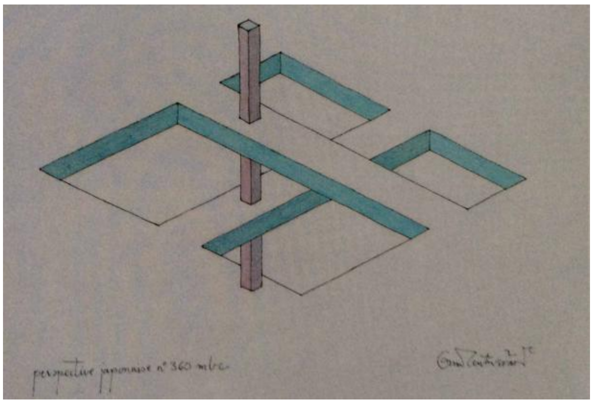
CIDI Roma

Roma 20-01-2016

i punti della geometria gli infiniti della matematica

giuliano spirito



Oscar Reutersvard, Impossible Figure

La storia di ogni disciplina scientifica non è mai un percorso lineare di progressiva e felice conquista di livelli più elevati. Essa invece "gronda lacrime e sangue", poiché vive crisi radicali che costringono spesso a drammatiche e/o esaltanti rivisitazioni.
Ecco allora, a titolo esemplare, un paio di questi momenti critici relativi alla matematica: in ambito geometrico, l'abbandono dell'illusione di poter pensare – come sarebbe naturale – i punti come granellini; in ambito numerico (e non solo), l'ardimentoso cimento con il confronto tra infiniti.

il pensare della matematica non è “naturale”

gli stessi oggetti della matematica sono “controversi

qualche esempio:

- il concetto di numero naturale non è affatto naturale

  “Devono esserci voluti secoli e secoli per scoprire che una coppia di fagiani e un paio di giorni sono entrambi esempi del numero due” - Bertrand Russell

- la basilare nozione di insieme, assunta in modo “ingenuo” (senza limiti e precauzioni), conduce a contraddizioni

  “Dividiamo l’insieme degli aggettivi in due sottoinsiemi: Autologici e Eterologici (un aggettivo si dice autologico se predica una proprietà che gli compete, altrimenti si dice eterologico). L’aggettivo eterologico non può appartiene né ad A né a E.” - Kurt Grelling

- la Geometria (unica) ha ceduto il posto alle geometrie (molteplici)

  “I postulati “veri” alla base della geometria euclidea lasciano il posto agli assiomi, validi purché coerenti, delle teorie post-euclideee”

Altri due esempi di distanza
tra pensiero naturale
e costruzione matematica

I PUNTI DELLA GEOMETRIA

NON COINCIDONO AFFATTO

CON I PUNTI DELLA REALTÀ

C'È INFINITO E INFINITO,

OVVERO

GLI INFINITI NON SONO TUTTI UGUALI,

OVVERO

CI SONO INFINITI PIÙ NUMEROSI DI ALTRI

i punti della geometria non coincidono con i punti della realtà

Cosa è più naturale?

Un punto è…

un granellino oppure un'idea astratta

Tra due punti (anche vicinissimi) c'è…

un numero finito di punti oppure un numero infinito di punti

Una retta, che è illimitata, contiene un numero infinito di punti; un segmento, che è limitato, contiene…

un numero finito di punti oppure un numero infinito di punti

Un segmento che è lungo il doppio di un altro contiene…

il doppio dei punti del secondo oppure tanti punti quanti il secondo

non è quindi strano che, finché è stato possibile, gli studiosi di geometria abbiano assunto che i punti sono granellini, con tutte le conseguenze…

2 domande

1) In quale momento della storia della geometria (e del pensiero) è stata ripudiata la concezione granulare dei punti (la più naturale)?

2) *Quale grave motivo può aver indotto (costretto, diremmo) i matematici ad abbandonare la pur semplice concezione granulare della linea, ossia la concezione di una linea contenente un numero finito di punti di lunghezza finita, cioè di punti-granellini?*

Attilio Frajese – "Attraverso la storia della matematica"

Sul primo punto

→ La geometria greca inizia intorno al 600 a.C., quando Talete di Mileto (?) raccoglie l'eredità della geometria egizia e assiro-babilonese.

→ Nel 300 a.C. ("Elementi" di Euclide) l'idealizzazione della geometria è pienamente compiuta.
Ma Euclide pone tra i postulati della sua costruzione della geometria in forma di teoria ipotetico-deduttiva il seguente:
Tra due punti qualunque di una linea si può sempre inserire almeno un punto intermedio (dunque un segmento contiene infiniti punti).

600 a.C. 300 a.C.

→ L'intervallo temporale si restringe perché Platone (427-347) nel dialogo *Teeteto* narra di ricerche del matematico di tal nome che rimandano a una concezione adimensionale del punto.

→ Un'ulteriore riduzione dell'intervallo temporale: Zenone di Elea (intorno al 450 a.C.), nel dimostrare l'impossibilità del moto, sviluppa un'argomentazione che dà per scontata la possibilità di dividere all'infinito un segmento:
il moto non esiste perché per andare da A a B dovrei passare per il punto intermedio M_1 e prima ancora per il punto M_2 intermedio tra A e M_1, e prima ancora per il punto M_3 intermedio tra A e M_2…, processo che si prolunga inesorabilmente all'infinito rendendo impossibile il movimento da A a B.

A M_3 M_2 M_1 B

→ Per effettuare il passaggio da punti-granelli a punti ideali occorrevano forti motivazioni; possiamo ragionevolmente ritenere che prima di Pitagora (circa 570-500 a.C.) e dei pitagorici non sussistessero queste motivazioni. Possiamo allora restringere ulteriormente il nostro intervallo temporale, che **si riduce infine a circa cento anni**:

600 a.C. 550 a.C. 450 a.C. 300 a.C.

Sul secondo punto

Quale drammatico motivo può aver costretto all'abbandono della concezione granulare, tanto più intuitiva, naturale, "facile", in favore della concezione astratta, idealizzata, "difficile"?

Il drammatico motivo è tanto semplice quanto inesorabile:
***una concezione granulare del punto è incompatibile con le scoperte dei cultori della geometria, in particolare con il cosiddetto teorema di Pitagora*.**

Cerchiamo di capire come e perché il teorema di Pitagora (considerato insieme a una proprietà aritmetica che vedremo tra un momento) costringe ad abbandonare il punto di vista granulare…

Una proprietà aritmetica:

dati due numeri (naturali) A e B primi tra loro (cioè privi di divisori comuni diversi da 1) non può essere

$$A^2 = 2\,B^2$$

dimostrazione per assurdo

$A^2 = 2B^2 \rightarrow A^2$ pari $\rightarrow$ A pari $\rightarrow$

- B dispari
- $A = 2C \rightarrow A^2 = 4C^2 \rightarrow 4C^2 = 2B^2 \rightarrow 2C^2 = B^2 \rightarrow B^2$ pari $\rightarrow$ B pari

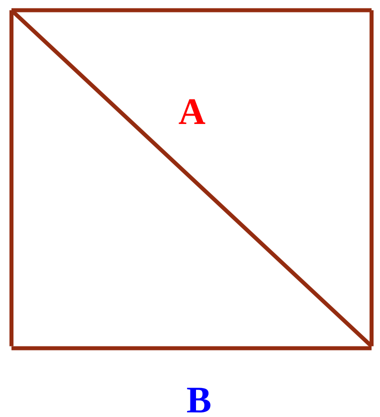
(questa dimostrazione è simile a quella attribuita a Eudosso di Cnido che si trovava nelle antiche edizioni degli “Elementi” di Euclide)

Il “combinato disposto” di questa proposizione aritmetica e del teorema di Pitagora è gravido di conseguenze.
La più importante in ambito geometrico è la seguente:

il lato e la diagonale di un quadrato sono incommensurabili

dimostrazione per assurdo:

supponiamo che il lato e la diagonale del quadrato siano commensurabili e l’unità di misura sia U



Possiamo supporre che A e B non abbiano divisori comuni (se ci fosse un divisore comune D basterebbe prendere come unità di misura la precedente moltiplicata per D, cioè UxD).
Per il teorema di Pitagora si ha

$$A^2 = B^2 + B^2$$

e dunque

$$A^2 = 2B^2$$

Ma questo, ormai lo sappiamo, è impossibile. **Dunque il lato e la diagonale sono incommensurabili**.

La scoperta dell'incommensurabilità di lato e diagonale del quadrato segna la disfatta definitiva della concezione del punto come granello!

(se i punti fossero granelli il lato e la diagonale sarebbero commensurabili con unità di misura appunto il granello…)

SE VOGLIAMO AVERE UNA GEOMETRIA COERENTE SIAMO COSTRETTI AD ASSUMERE CHE I PUNTI NON SIANO GRANELLI
MA ENTITÀ ASTRATTE

con tutte le bizzarre, sconcertanti, sgradevoli conseguenze del caso:

Tra due punti (anche vicinissimi) c'è…

un numero infinito di punti

Una retta, che è illimitata, contiene un numero infinito di punti; un segmento, che è limitato, contiene…

anch'esso un numero infinito di punti

Un segmento che è lungo il doppio di un altro contiene…

tanti punti quanti il secondo

E’ facile immaginare con quale entusiasmo questa scoperta venisse accolta tra i pitagorici…

La scoperta dei rapporti incommensurabili è attribuita a Ippaso di Metaponto 5° secolo a.C. “Si racconta che i pitagorici stessero allora solcando il mare su di una nave e che essi abbiano gettato fuori bordo Ippaso per punirlo del fatto di aver introdotto un elemento dell’universo che negava la dottrina pitagorica secondo la quale tutti i fenomeni dell’universo possono essere ridotti a numeri interi o a loro rapporti.”

Morris Kline – “Storia del pensiero matematico”

“Non v’è dubbio che questa verità abbia gettato la costernazione nelle fila dei pitagorici. Ne è testimone persino il nome dato a queste entità: alogon, gli ‘inesprimibili’, furono detti gli incommensurabili e si fece giurare agli adepti della scuola di non divulgare la loro esistenza, perché risultava da questa verità che nell’opera dell’Architetto vi era un’inspiegabile imperfezione, e bisognava mantenere il più stretto segreto affinché la sua ira nel vedersi scoperto non si scagliasse sugli uomini.”

Tobias Dantzig “Il numero: linguaggio della scienza”

“Si racconta che coloro che per primi rivelarono l’esistenza degli irrazionali, tenuta fino ad allora segreta, perirono tutti in un naufragio. Poiché ciò che è indicibile e senza forma deve rimanere nascosto.”

Proclo di Eudemo “Riassunto dei geometri”

Tra parentesi: la proposizione aritmetica vista sopra ha **un'altra spiacevole conseguenza**, stavolta attinente non alla geometria ma al mondo dei numeri…

La domanda è questa:

è necessario, è utile, è ragionevole, prendere in considerazione numeri con infinite cifre decimali che si succedono in modo anarchico, senza una regola, senza una *ratio*, senza una logica?

Solo *obtortissimo collo* ci siamo acconciati a far uso (oltreché di naturali e decimali limitati) anche di numeri periodici (infinite cifre decimali, che però, almeno, si ripetono con regolarità teutonica, prevedibili all'infinito!). Lo abbiamo fatto per dare un risultato alla divisione 2 : 3 (ovvero, per attribuire un valore alla frazione 2/3).

Speravamo di poterci limitare a questo e di non dover subire l'oltraggio dei decimali sregolati e anarchici! Questo pensiero-speranza nasceva dal fatto che le divisioni e le frazioni non ci portano mai fuori del mondo abitato solo da numeri interi e da numeri decimali "educati" (cioè limitati o, male che vada, periodici). Per parlar difficile: l'insieme Q dei numeri razionali (cioè, in sostanza, l'insieme delle frazioni) è chiuso rispetto alle operazioni aritmetiche, comprese le sempre temute e temibili divisioni.

La "chiusura" discende dal fatto che la divisione tra A e B produce resti sempre minori di B → le cifre decimali del risultato non possono che ripetersi con regolarità…

23	**7**
20	
60	3,285714285714285714…
40	
50	
10	
30	
2	

E allora: davvero siamo costretti a considerare numeri non razionali (numeri irrazionali)?

Purtroppo (maledetto Eudosso o chi per lui!) la risposta è sì. Infatti dalla proposizione aritmetica vista prima discende che la radice di 2 non è il valore di una frazione (e quindi è un numero irrazionale, un maledetto numero con infinite maledette cifre decimali “zompettanti”!)

Se, per assurdo, fosse

radice di 2 = A/B

(possiamo supporre A e B primi tra loro, altrimenti semplifichiamo la frazione)

$\rightarrow 2 = A^2 / B^2 \rightarrow A^2 = 2 B^2 \rightarrow$ impossibile!

Ci si potrebbe consolare dicendo: va bene, ma quando mai incontreremo questa maledetta radice di 2? Purtroppo entra di nuovo in campo il teorema di Pitagora: la diagonale del quadrato più semplice del mondo, quello di lato 1, misura proprio radice di 2.

Dunque non c’è scampo: **ci tocca l’amaro calice di avere a che fare con i numeri irrazionali…**

Ma non finisce qui: l'ormai famigerato "combinato disposto" della proposizione aritmetica e del teorema di Pitagora ci procura **un'altra sorpresa**…

Questa volta la domanda è:

la retta "si riempie" con i numeri razionali?

Risposta intuitiva (e quindi auspicata). Certo che SI'
(o come anche si usa, assolutamente SI').

Risposta necessitata dal desiderio di costruire una matematica coerente: certo che **NO** (assolutamente **NO**)

Perché ci aspetteremmo un sì?
Perché i numeri razionali sono "fitti" come i punti;
e così come tra due punti ce ne sono infiniti, così tra due numeri razionali (cioè, in sostanza, tra due frazioni) ce ne sono infiniti (anche tra 5/7 e 6/7!).

Perché ci dobbiamo rassegnare a un no? Basta considerare questa figura!

vedi lavagna – perché non sono capace
di farla con il computer!

Quel punto della retta che vedi benissimo è un punto che non corrisponde al valore di nessun numero razionale perché corrisponde a radice di 2, numero irrazionale.

Amara (e anti-intuitiva conclusione): **per "coprire" la retta non bastano i numeri razionali**.

gli infiniti della matematica non sono tutti ugualmente numerosi

→ *l'intera storia della matematica è un percorso, per così dire, pervicacemente contro-natura,*
dal naturale, in quanto vicino all'esperienza sensibile, al non naturale, e quindi all'astratto e quindi, per così dire, al rischio e all'azzardo…

→ *ogni tappa di questo percorso è indotta da una necessità:*
di coerenza, di completezza, a volte semplicemente di eleganza

Anche in questo caso la storia comincia da lontano…
Possiamo datare l'inizio della vicenda da Galileo Galilei.

Premettiamo una piccola *legenda* per interpretare correttamente il brano galileiano:

numeri = numeri naturali

numeri quadrati = i numeri che si ottengono moltiplicando un numero per se stesso

radici = i numeri che producono i quadrati

Galileo Galilei - *Discorsi e dimostrazioni matematiche – Giornata prima* (1635)

Salviati – Se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima. […] [Numeri] > [Quadrati]
Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, loro esser tanti quante sono le proprie radici, avvenga che ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato, né quadrato alcuno ha più di una sola radice, né radice alcuna più di un quadrato solo. […] [Quadrati] = [Radici]
Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri, poiché non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato; [Radici] = [Numeri]
e stante questo, converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poiché tanti sono quante le lor radici, e radici sono tutti i numeri. [Quadrati] = [Numeri]
…
Salviati - Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno a gl'infiniti, dandogli quelli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso che sia inconveniente, perché stimo che questi attributi di maggioranza, minorità ed egualità non convenghino a gl'infiniti, de i quali non si può dire, uno esser maggiore o minore o eguale all'altro.

Qualcuno oserà ciò che Galileo considera “sconveniente”? Sì, qualcuno lo fa ed è Georg Cantor.

Cantor, nasce nel 1845 a San Pietroburgo, figlio di un danese e di una russa di origine austriaca, studia in Germania e Svizzera, vive poi in Germania, dove muore nel 1918 a Halle, ricoverato in un ospedale psichiatrico.

→ Per superare la contraddizione che ferma Galileo, Cantor distingue, nel considerare insiemi infiniti, la nozione di inclusione e la nozione di minore numerosità (nel finito inclusione implica minore numerosità).

→ In particolare l’uguale numerosità (che Cantor chiama equipotenza) è legata (e questo vale sia al finito che all’infinito), alla possibilità di stabilire una corrispondenza perfetta (quella che in matematica viene detta corrispondenza biunivoca) tra i due insiemi considerati.

→ Quindi abbiamo che l’insieme dei quadrati è incluso nell’insieme dei numeri [naturali] e, al tempo stesso, l’insieme dei quadrati è equipotente con l’insieme dei numeri [naturali].

Quello che rende degna di interesse l’idea di Cantor è la possibilità di applicarla con esiti significativi agli insiemi numerici della matematica.

Il primo risultato – sconcertante - che Cantor ottiene è la dimostrazione dell’equipotenza dell’insieme (pur rarefatto) dei numeri naturali con l’insieme (fittamente denso) dei razionali.

Primo procedimento diagonale di Cantor

(equipotenza tra N e Q)

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	…..
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	…..
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	…..
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	…..
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	…..
6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	…..
…	…	…	…	…	…	…..

Se riesco a indicare un percorso che “prende” tutte le frazioni della tabella allora ho dimostrato che le frazioni sono tante quante i naturali…

Cantor ci riesce con un semplice percorso a zig-zag…

1/1	1/2	1/3	1/4	…..
2/1	2/2	2/3	2/4	…..
3/1	3/2	3/3	3/4	…..
4/1	4/2	4/3	4/4	…..
…	…	…	…	…..

Quindi gli sparuti naturali sono tanti quanti i fittissimi razionali… [N] = [Q]

Non sarà che tutti gli insiemi infiniti sono equipotenti? (questo toglierebbe ogni valore al lavoro cantoriano).

La risposta è negativa.
A prima vista non si direbbe ma i reali (razionali + irrazionali) sono più numerosi dei razionali…

Secondo procedimento diagonale di Cantor

(i reali tra 0 e 1 hanno potenza maggiore dei naturali)

$x_1 = 0{,}a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$

$x_2 = 0{,}b_1b_2b_3\ldots b_n\ldots$

$x_3 = 0{,}c_1c_2c_3\ldots c_n\ldots$

$x_4 = 0{,}d_1d_2d_3\ldots d_n\ldots$

…….

$x = 0{,}abcd\ldots$ con $a = a_1+1$ (modulo 10)
$b = b_2+1$ (modulo 10)
$c = c_3+1$ (modulo 10)
$d = d_4+1$ (modulo 10)
…….

x è diverso da ogni x_i e quindi non compare nell'enumerazione dei reali compresi tra 0 e 1

Dunque, a maggior ragione:
i reali sono più numerosi dei fittissimi razionali… [R] > [Q]

In realtà Cantor non si ferma qui. Egli costruisce una scala infinita di insiemi infiniti di numerosità crescente…

"Nessuno riuscirà a cacciarci dal paradiso che Cantor ha creato per noi."

David Hilbert

APPENDICE – Il paradosso di Grelling

eterologico è eterologico →
eterologico predica una proprietà di cui non gode →
eterologico non è eterologico

eterologico non è eterologico (quindi è autologico) →
eterologico predica una proprietà di cui gode →
eterologico è eterologico