Da una card l'ellisse

Un esempio di attività di scoperta

di Valerio Scorsipa, novembre 2014

Premessa

Ho insegnato matematica e fisica presso il Liceo scientifico “Galeazzo Alessi" di Perugia in una sezione P.N.I (piano nazionale per l’informatica) fino al 31 agosto 2007 per poi diventare dirigente scolastico. Negli anni antecedenti a quella data sono stato funzione strumentale per l'orientamento in entrata.
Un progetto che ho gestito in quella veste per alcuni anni è stato "Matematica nei cicli: continuità di un insuccesso?” con la partecipazione di insegnanti di scuola elementare, media e di Liceo.
Dal confronto che si è generato in quelle occasioni ho compreso l'importanza di fare attenzione ai passi di un apprendimento curato in profondità, in considerazione di quegli aspetti didattico-curricolari della matematica che ritornano come in una spirale crescente a far riflettere sulla importanza dei nuclei fondanti della disciplina.
Nella primavera del 2006 alla luce di questo ebbi l'idea di formulare e di proporre un'attività di scoperta con quelle caratteristiche in una classe quarta di liceo scientifico. La questione ebbe naturalmente un ritorno nel corso “Matematica nei cicli” e fu oggetto di confronto con gli insegnanti di scuola secondaria di primo grado e di scuola primaria che vi partecipavano.
L'esperienza maturata in quell'occasione mi ha spinto a mostrare quelle indicazioni didattiche anche nel corso CIDI del 2013/14.

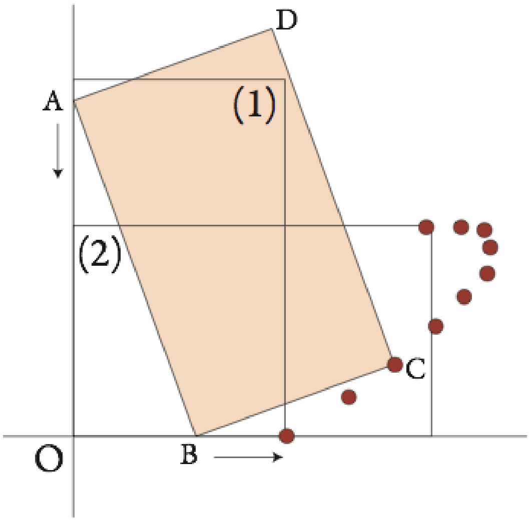
La scelta di un tema

Il naturale sviluppo del lavoro iniziale dovrebbe sfociare nella necessità di adottare modelli e schemi della matematica già noti, oppure di scoprirli per la prima volta apprezzandone l’utilità e, per questa via, giungere a un soddisfacente grado di formalizzazione, nonché porre le basi per altre generalizzazioni.
La scelta di un tema per un’attività di scoperta può essere casuale e rivelarsi con sorpresa una fonte inesauribile di collegamenti e di approfondimenti disciplinari a vario livello. Se è ragionevole porre dei limiti alla ricerca in considerazione dell'età e della preparazione degli alunni e frenare il loro naturale desiderio di proseguire ad oltranza ignari delle future difficoltà, è altresì vero che, qualche volta, l’insegnante dovrebbe lasciarsi tentare dalla curiosità e scoprire così aspetti e questioni importanti, che sono alla portata dei propri alunni e che in modo naturale stimolano in loro un pensare e un agire matematico. In ogni caso, non è poi così grave ammettere che il problema non può al momento essere affrontato e risolto. Anzi, è una lezione di umiltà con un effetto molto positivo sugli allievi. Una valida attività di scoperta s’innesca e s’intreccia in modo quasi naturale con il problem solving e con il problem posing, mentre le tecnologie didattiche rivestono un ruolo importante perché, opportunamente adoperate, divengono il mezzo e il motore per esplorare e simulare casi particolari e indurre così raffinamenti e generalizzazioni ulteriori. Infine, va messo in evidenza che, proprio attra-

verso l’impiego delle nuove tecnologie, alcuni alunni possono manifestare capacità che altrimenti resterebbero nascoste o inespresse.

Una domanda iniziale

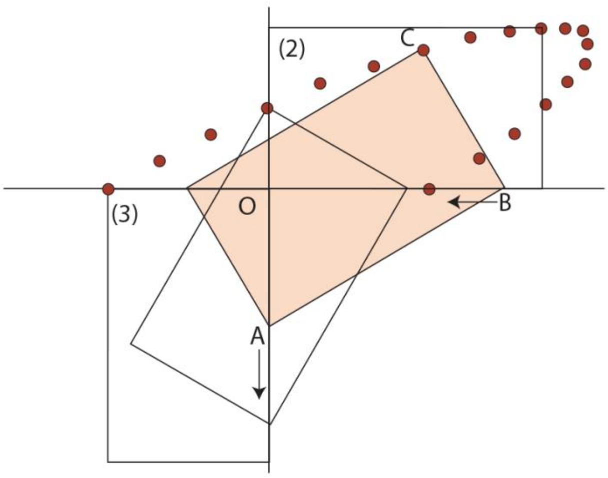
L’impostazione di tutto il processo didattico è fondamentalmente affidata a una domanda iniziale, proprio come avviene in una qualsiasi ricerca condotta con metodo scientifico per definire, analizzare e risolvere tutti i problemi che la caratterizzano. Nel caso che vogliamo esaminare la domanda è la seguente:



Che cosa disegnerà una punta scrivente collocata nel vertice di un rettangolo, se altri due vertici consecutivi scorrono l’uno su una retta e l’altro su un’altra fra loro perpendicolari?

Denotati in senso antiorario i vertici di un cartoncino rettangolare con A, B, C e D, si può chiedere agli alunni di disegnare alcune posizioni del vertice C mentre i vertici A e B sono vincolati a scorrere su due rette perpendicolari. Gli alunni produrranno un disegno simile a quello della figura seguente portando il rettangolo dalla posizione (1) alla posizione (2) e avranno difficoltà a capire che possono procedere oltre.

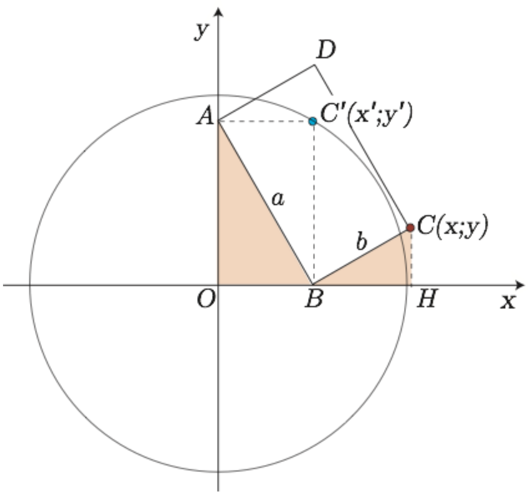
In sostanza, potremo chiedere quale sarà la successiva posizione di C se il rettangolo continua a ruotare e forse constateremo che gli alunni ritengono impossibile proseguire il moto
dei vertici A e B sulle rette, a meno di tornare indietro. In altri termini, c’è il rischio di concepire il movimento confinato in un solo quadrante. La meccanica del moto deve essere compresa appieno affinché l’allievo si renda conto di tutte le potenzialità. Mentre A scorre sulla



retta verticale verso il basso, B muove verso destra sulla retta orizzontale. In questo modo il rettangolo passa da una posizione iniziale ad una finale rimanendo confinato in un quadrante. Una volta che A raggiunge O, B si trova nella posizione più lontana. E questo è quanto lo studente apprende in prima battuta. Il vertice A può tuttavia proseguire il suo moto oltrepassando O verso il basso, mentre B è obbligato a ripercorrere in senso contrario il segmento già descritto. In modo analogo il punto B superato O richiama il vertice A che percorrerà al contrario la strada già fatta. È così che il rettangolo si muove in tutti e quattro i quadranti fino a tornare nella posizione iniziale.

Con gli assi cartesiani

Il vincolo di scorrere su due rette perpendicolari al quale sono soggetti i vertici A e B del rettangolo porta evidentemente a introdurre un sistema di assi cartesiani e, di conseguenza, ad assegnare le coordinate ai punti.
Sia C’ il punto del piano avente B e A come proiezioni sugli assi x e y. Poniamo allora C’(x’, y’) e C(x, y) e dunque A(0, y’) e B(x’, 0).



Mediante il teorema di Pitagora e la similitudine è facile verificare che valgono le relazioni:

$$x'^2 + y'^2 = a^2$$

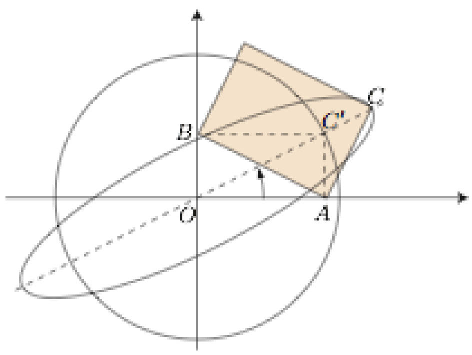
$$x = x' + \frac{b}{a}y'$$

$$y = \frac{b}{a}x'$$

Dalle ultime due si possono ricavare le formule inverse che calcolano x’ e y’ in funzione di x e y, ottenendo così l’equazione del luogo descritto da C al variare di C’ sulla circonferenza:

$$\left(x - \frac{a}{b}y\right)^2 + y^2 - b^2 = 0.$$

Si tratta dell’ellisse rappresentata in figura.

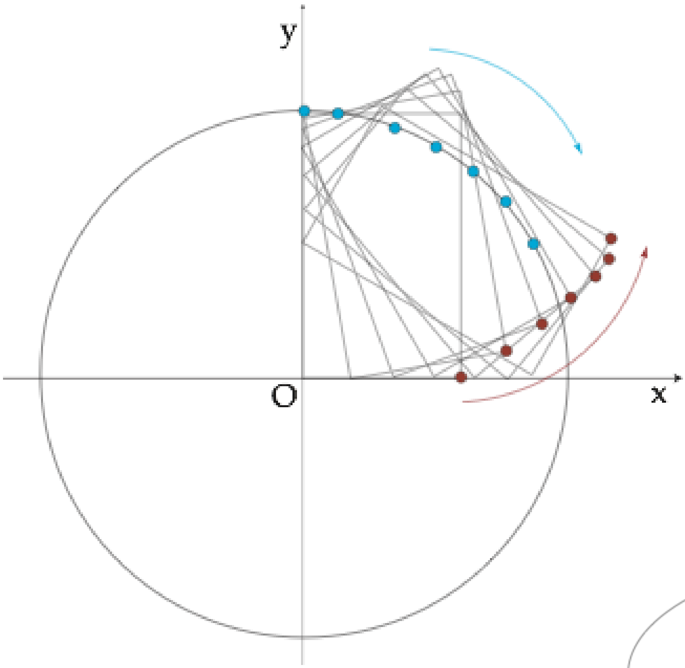


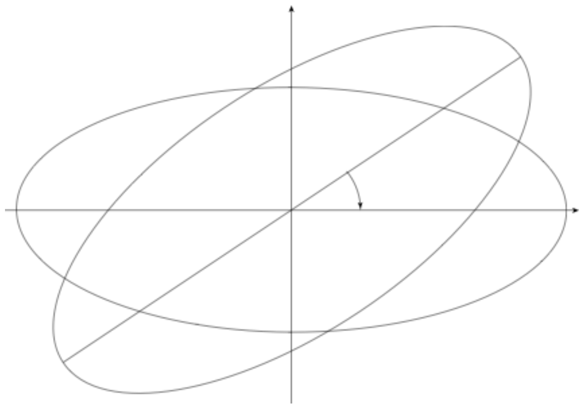
Un'affinità

Riflettiamo ora sulle relazioni grazie alle quali si ottiene il punto (x,y) in funzione del punto

$$\begin{cases} x = & x' + \frac{b}{a}y' \\ y = & \frac{b}{a}x'. \end{cases}$$

Possiamo immaginare le infinite circonferenze di centro l’origine O che si trasformano in altrettante ellissi grazie al movimento di rettangoli vincolati, al solito, in modo che due vertici scorrano l’uno sull'asse y e l’altro sull'asse x, e tali, però, che il rapporto delle loro dimensioni sia il valore costante k = a/b. In questo modo si assiste ad una trasformazione che interessa tutti i punti del piano. Le equazioni definiscono un’affinità φ. Cerchiamo di indagarne le proprietà. Mentre il punto C’ si muove in verso orario sulla circonferenza, il punto C descrive in senso antiorario l’ellisse. Perciò φ si dice *invertente*. Si prova abbastanza facilmente che φ ammette un solo punto unito, l’origine O, e che esistono due rette per O che sono unite nella φ, tra loro perpendicolari e che contengono gli assi maggiore e minore dell'ellisse.





È possibile altresì mediante un’opportuna rotazione giungere all’equazione dell’ellisse nella sua forma canonica.

Domande e nuovi problemi

Una volta capito il senso e gli scopi della ricerca, è la curiosità dei giovani che li sospinge a formulare domande e ipotesi che mutano il disegno primitivo. Il docente saprà accogliere e guidare le loro istanze e le loro congetture.

Il punto C potrebbe coincidere con B e, in questo caso, quale sarebbe il luogo descritto?

Si tratta di un caso particolare che può essere molto prezioso per attivare e sviluppare complessi processi di astrazione e di ideazione. La mente si sottopone come in un gioco all’appassionata fatica di alterare solo alcune parti dello schema. Ovviamente, il caso appena illustrato porterà a riconoscere nel segmento di estremi (−a; 0) e (a; 0) il luogo geometrico descritto da C. È l’occasione per affermare che si tratta di un’ellisse seppure degenere avente i fuochi negli estremi del segmento, o, che fa lo stesso, con il semiasse minore nullo.
Il punto C potrebbe essere un punto qualsiasi del segmento AB?
La domanda modifica fortemente lo schema del rettangolo che qui non è più degenere, ma è altro: ci sono tre punti A, B e C come nel caso generale anche se sono allineati. Si sta profi-

lando qualche altra idea. Per identificare la posizione di C nel segmento AB basta affermare che i segmenti AB e CB sono in un dato rapporto k.
È in ogni caso un esercizio alla portata degli allievi trovare l'equazione del luogo geometrico descritto da C al variare di C' sulla circonferenza di centro O e raggio a.
Non è qui il caso di approfondire con altri calcoli.
Se prendiamo un triangolo ABC con i vertici A e B che si muovono al solito modo, che cosa disegnerà una punta scrivente in C?
Facciamo realizzare la costruzione con differenti triangoli, alla fine i ragazzi osserveranno che si disegna ancora un'ellisse.

1. *Sara possibile ottenerne l'equazione?*
2. *Le lunghezze dei lati e le misure degli angoli saranno rintracciabili come parametri nell'equazione?*
3. *Sarà possibile ridurre il caso del triangolo a quello del rettangolo o a uno dei casi precedenti?*

Lasciamo aperte queste domande: la ricerca non è finita.

Conclusioni

Lo svolgimento di questa attività appare, ed è, corposo e tuttavia si può essere certi che in classe altre questioni affioreranno: potremo accoglierle e andare avanti nella ricerca oppure potrà essere opportuno fermarsi, per riprendere in seguito il cammino intrapreso. Nello sviluppo del presente lavoro si possono evidenziare diversi stadi di avanzamento di una possibile attività didattica. Si riconosce, ad esempio, una possibile applicazione didattica nell'esercizio manuale e nell'applicazione del teorema di Pitagora e della similitudine di triangoli rettangoli per allievi della scuola secondaria di primo grado.
In questo tipo di addestramento gli allievi avvertono in modo naturale l'esigenza di generalizzare, di formalizzare e di analizzare casi particolari. Un insegnante che si accinga ad una simile attività deve imparare a farsi sospingere dalle curiosità dei propri allievi e dalle loro conoscenze. In questo modo eviterà di stancarli, ma al momento opportuno dovrà essere capace di risvegliare il loro interesse proponendo qualche congettura. Nulla vieta, poi, che un'esperienza di problem posing/solving sia l'occasione per introdurre alcuni argomenti: nella fattispecie, per esempio, le trasformazioni affini. Infine, è importante che un insegnante metta al centro un problema nella sua accezione più generale, perché in questo modo i giovani hanno modo di apprezzare una matematica allo "statu nascendi", proprio mentre si fa, e lo seguiranno volentieri in questa avventura della conoscenza qualche volta precedendolo con le loro intuizioni.
Nella pratica didattica crediamo inoltre che sia opportuno non terminare mai una questione. Alcuni aspetti devono affacciarsi alla mente come ancora non del tutto risolti e quindi di stimolo per proseguire. Si rischia altrimenti di impoverire la portata e l'idea stessa della ricerca e si dà al giovane allievo il convincimento sbagliato che tutto si accomodi mentre questo non è mai definitivamente vero, proprio come nella vita.